

Вступ

Методичні вказівки написані відповідно діючій програмі за курсом «Вища математика» для студентів очної форми навчання за напрямом підготовки 6.090101 «Агрономія» спеціальності 5.09010103 «Виробництво і переробка продукції рослинництва».

Методичні вказівки розглядають системний виклад програмних питань до тем відповідно структури навчальної дисципліни:

Назва теми	Усього	ЛЗ	ПЗ	Сам
Модуль №1 «Елементи лінійної алгебри. Аналітична геометрія. Елементи векторної алгебри. Диференціальне числення»				
Тема: <i>Матриця. Визначники квадратних матриць</i>	2	2	-	2
Тема: <i>Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.</i>	4	2	2	2
Тема: <i>Вектори. Операції над векторами. Добуток векторів систем лінійних рівнянь.</i>	6	2	-	2
Тема: <i>Пряма лінія на площині.</i>	2	2	-	2
Тема: <i>Диференціальне числення функції однієї змінної</i>	2	2	-	2
Тема: <i>Застосування диференціального числення для дослідження функцій і побудови їх графіків.</i>	2	2	2	2
Разом за модулем 1	28	12	4	12
Модуль №2 «Інтегральне числення. Диференціальні рівняння»				
Тема: <i>Невизначений інтеграл та його властивості. Основні методи інтегрування.</i>	6	4	-	2
Тема: <i>Визначений інтеграл, його обчислення та застосування.</i>	6	2	2	2
Тема: <i>Диференціальні рівняння першого порядку.</i>	6	2	2	2
Тема: <i>Диференціальні рівняння другого порядку.</i>	6	4	-	2
Тема: <i>Числові ряди. Знакозмінні і степеневі ряди.</i>	4	-	-	4
Разом за модулем 2	26	10	4	12
Усього годин	54	22	8	24

Мета даних методичних вказівок - закріплення теоретичного матеріалу й придбання практичних умінь для підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки студентів із прикладною спрямованістю.

Методичні вказівки складаються з двох частин: лекційної та практичної, в кожній з котрої є теми з першого та другого змістовних модулів. У дійсних методичних вказівках на початку кожної теми даються короткі теоретичні питання, приводяться основні означення й формули, зразки розв'язання прикладів і задач, що відносяться до відповідного розділу курсу. Тут же приводяться завдання для самостійної роботи і контрольні питання для самоперевірки. Практичні заняття закріплюються самостійною роботою.

ЛЕКЦІЇ З МОДУЛЯ №1

«Елементи лінійної алгебри. Аналітична геометрія. Елементи векторної алгебри. Диференціальне числення»

Лекція №1

Тема. Матриця. Визначники квадратних матриць.

Питання лекції:

1. Матриці. Основні поняття. Види матриць.
2. Дії над матрицями .
3. Визначники квадратних матриць. Визначники 2-го і 3-го порядку.
4. Мінори та алгебраїчні доповнення.
5. Властивості визначників.

1. Матриці. Основні поняття. Види матриць

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел утримуюча m рядків і n стовпців. Числа, які складають матрицю, називаються елементами матриці.

Матриці позначаються прописними (заголовними) буквами латинського алфавіту: $A, B, C \dots$, а для позначення елементів матриці використовуються малі (рядкові) літери з подвійною індексацією: a_{ij} , де i – номер рядка, j – номер стовпця.

Наприклад, матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

або в скороченому запису: $A = (a_{ij}), i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$.

Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Дві матриці A й B одного розміру називаються рівними, якщо вони співпадають почленно тобто: $a_{ij} = b_{ij}$ для $\forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ (квантор загальності – означає для будь-яких)

Матриця A , що складена з коефіцієнтів при невідомих системи, називається **основною матрицею системи**. Таблицю

$$B = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} & b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right), \quad (2)$$

яка містить і стовпець з вільних членів системи, називають **розширеною матрицею системи**.

Види матриць

Матриця, що складається з одного рядка – називається матрицею-рядком (вектором-рядком), а з одного стовпця – матрицею-стовпцем (вектором-стовпцем).

Наприклад,

$A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$ – матриця-рядок;

$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець.

Матриця називається **квадратною** n -го порядку, якщо число її рядків дорівнює числу стовпців і дорівнює n . Наприклад,

$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – квадратна матриця третього порядку.

Число рядків, (а отже і число стовпців) квадратної матриці називається **порядком** матриці.

Елементи матриці a_{ij} , у яких номер стовпця дорівнює номеру рядка ($i = j$) називаються **діагональними** й утворюють **головну діагональ** матриці.

Для квадратної матриці головну діагональ утворюють елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Якщо всі недіагональні елементи квадратної матриці дорівнюють нулю, то матриця називається **діагональною**. Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \text{діагональна матриця третього порядку.}$$

Якщо в діагоналі матриці n -го порядку всі діагональні елементи дорівнюють одиниці, то матриця називається **одиничної** n -го порядку, вона позначається буквою E

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{одинична матриця третього порядку.}$$

Матриця будь-якого розміру називається **нульовою** або **нуль-матрицею**, якщо всі елементи дорівнюють нулю:

$$0_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Дії над матрицями

Над матрицями, як і над числами, можна робити ряд операцій, причому деякі з них аналогічні операціям над числами, а деякі – специфічні.

1). Множення матриці на число

Добутком матриці A на число λ (лямбда) називається матриця $B = \lambda \cdot A$, елементи якої $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$, для $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

$$\text{Наприклад, якщо } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ то } 3A = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Наслідок. Загальний множник всіх елементів матриці можна виносити за знак матриці. Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 20 & 12 & 6 \\ 52 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 26 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В окремому випадку, добуток матриці A на число 0 є нульова матриця, т.т. $0 \cdot A = 0$.

2). Додавання матриць

Сумою двох матриць A і B однакового розміру $m \times n$ називається матриця $C = A + B$ елементи якої $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ (тобто матриці складаються поелементно).

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, тоді $C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 7 \end{pmatrix}$.

3). Віднімання матриць

Різниця двох матриць однакового розміру визначається через попередні операції:

$$A - B = A + (-1) \cdot B.$$

4). Множення матриць

Множення матриці A на матрицю B визначено, коли число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої (В цьому випадку матриця A називається **погодженої** з матрицею B).

Тоді **добутком** матриць $A \cdot B$ називається така матриця $C_{m \times n}$, кожен елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B :

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{s=1}^k a_{is} \cdot b_{sj},$$

де $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Приклад. Обчислення добутку матриць $A \cdot B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

а) Знайдемо розмір матриці-добутку (якщо добуток матриць можливий):

$$\underset{2 \times 3}{A} \cdot \underset{3 \times 3}{B} = \underset{2 \times 3}{C};$$

б) Обчислимо елементи матриці-добутку C , помноживши елементи кожного рядка матриці A на відповідні елементи стовпців матриці B відповідним чином:

$$C = \begin{pmatrix} -1+3-6 & 0+5+0 & 1+2+3 \\ 0+12-4 & 0+20+0 & 0+8+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ 8 & 20 & 10 \end{pmatrix}.$$

б). Транспонування матриці

Транспонуванням матриці називається перехід від матриці A к матриці A' (A°), у якій рядки і стовпці помінялися місцями зі збереженням порядку.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{j1} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{j2} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1i} & a_{2i} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{mi} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{jn} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

З визначення випливає, що якщо матриця A має розмір $m \times n$, то транспонована матриця буде мати розмір $n \times m$.

3. Визначники квадратних матриць. Визначники 2-го і 3-го порядку

Необхідність введення визначника – числа, що характеризує квадратну матрицю A , – тісно зв'язане з розв'язанням систем лінійних рівнянь. Визначник матриці A позначається $|A|$ або Δ .

Визначником матриці першого порядку $A = (a_{11})$ **або визначником першого порядку, називається елемент** a_{11} :

$$\Delta_1 = |A| = a_{11}.$$

Наприклад, нехай $A = (3)$, тоді $\Delta_1 = |A| = 3$.

Нехай задана система двох лінійних рівнянь із двома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (1)$$

коефіцієнти якої складають квадратну матрицю другого порядку

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Застосовуючи в системі (1) метод урівнювання коефіцієнтів, отримаємо:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{cases}.$$

Припустимо, що $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \neq 0$, тоді

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (3)$$

Легко перевірити, підставляючи отримані значення невідомих у рівняння (1), що (3) є розв'язком (1).

Загальний знаменник значень невідомих (3) дуже просто виражається через елементи матриці (2): він дорівнює добутку елементів головної діагоналі мінус добуток елементів другої діагоналі. Це число називається **визначником** (або **детермінантом**) матриці (2), ще кажуть, **визначником другого порядку**, тому що матриця (2) є матриця другого порядку.

Для позначення визначника матриці (2) вживається наступний символ:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} & (4) \\ \text{"+"} & \begin{array}{c} \diagup \quad \cdot \quad \cdot \\ | \quad \cdot \quad \cdot \quad | \\ \diagdown \end{array} & \text{"-" } \begin{array}{c} \cdot \quad \cdot \\ | \quad \cdot \quad \cdot \quad | \\ \diagup \end{array} \end{array}$$

Добутки $a_{11}a_{22}$ і $a_{12}a_{21}$ називаються членами визначника другого порядку.

Отже, визначником матриці другого порядку $\Delta = (\Delta_{ij})$ або визначником другого порядку називається число, що обчислюється за формулою (4).

Нехай дана система трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (5)$$

з матрицею із коефіцієнтів

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Якщо помножити обидві частини першого рівняння системи (5) на число $a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}$, обидві частини другого рівняння (5) на $a_{13} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{33}$ й обидві частини третього рівняння (5) на $a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22}$, а потім скласти всі три рівняння, то як легко перевірити, коефіцієнти при x_2 і x_3 виявляться рівними нулю, тобто ці невідомі одночасно виключаються, і ми одержимо рівність:

$$\begin{aligned} & (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}) \cdot x_1 = \\ & = b_1 \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot b_3 + a_{13} \cdot b_2 \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot b_3 - a_{12} \cdot b_2 \cdot a_{33} - b_1 \cdot a_{23} \cdot a_{32} \end{aligned} \quad (7)$$

Коефіцієнт при x_1 в цій рівності називається **визначником третього порядку**, який відповідає матриці (6).

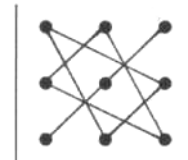
$$\Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \quad (8)$$

Хоча вираз визначника третього порядку є досить громіздким, закон його складання з елементів матриці (6) виявляється досить простим. Справді, один із трьох членів визначника, що входять у його вираз (8) зі знаком плюс, буде добутком елементів головної діагоналі, кожний із двох інших – добутком елементів, що лежать на паралелі до цієї діагоналі з додавкою третього множника з протилежного кута матриці. Члени, що входять у (8) зі знаком мінус, будуються в такий же спосіб, але щодо другої діагоналі. Одержимо спосіб обчислення визначника третього порядку:

"+"



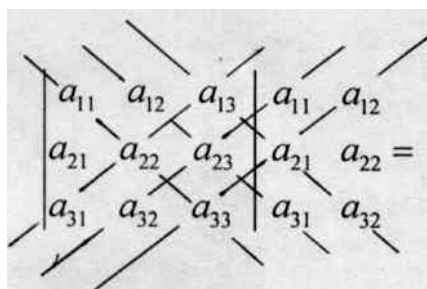
"-"



Ліворуч схематично показане обчислення додатних членів визначника третього порядку, праворуч – правило обчислення його від’ємних членів.

Таким чином, одержимо спосіб обчислення визначника третього порядку (формула (8)), що зветься **способом трикутника**.

Приведемо ще два способи розкриття визначників третього порядку. Другий спосіб розкриття визначника третього порядку називається **способом Саррюса**.



$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

У цьому випадку до визначника дописуються ще два стовпці, і додатними членами визначника є добутки, що стоять на головній діагоналі і паралельно їй. Від’ємними елементами є елементи, що стоять на допоміжній діагоналі і паралельно їй.

Третій спосіб обчислення визначника третього порядку – це спосіб розкриття визначника третього порядку по елементах будь-якого рядка або будь-якого стовпця, ще його називають **методом алгебраїчних доповнень**.

Розкриємо визначник по елементах першого рядка:

$$\begin{aligned} \Delta_3 = |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12} (a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13} (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}) = \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \end{aligned}$$

Дамо означення визначника n -ого порядку.

Визначником квадратної матриці n -ого порядку, або визначником n -ого порядку називається число, рівне алгебраїчній сумі $n!$ членів, кожний з яких є добутком n елементів матриці, узятих по одному з кожного рядка і кожного стовпця, причому член береться зі знаком плюс, якщо його індекс складає парну підстановку, і зі знаком мінус – у протилежному випадку.

4. Мінори й алгебраїчні доповнення

Нехай дана квадратна матриця A n -ого порядку. **Мінором** M_{ij} елемента a_{ij} матриці n -ого порядку називається визначник матриці $(n-1)$ -го порядку, отриманий з матриці A викреслюванням i -того рядка і j -го стовпця.

Наприклад, мінором елемента a_{13} матриці A третього порядку буде:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}$$

Кожна матриця n -ого порядку має n^2 мінорів $(n-1)$ -го порядку.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці n -ого порядку називається його мінор, узятий зі знаком $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$,

тобто алгебраїчне доповнення збігається з мінором, коли сума номерів рядка і стовпця $(i+j)$ – парне число, і відрізняється від мінору знаком, коли $(i+j)$ – непарне число.

Наприклад, $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -M_{23}$; $A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = M_{31}$.

Приклад. Знайти алгебраїчні доповнення всіх елементів матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Розв’язання. $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12$; $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3$;

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$
;

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$$
; $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3$; $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$;

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -8$$
; $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3$; $A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$.

5. Властивості визначників

1. Якщо який-небудь рядок (стовпець) матриці складається з одних нулів, то її визначник дорівнює 0.
2. При транспонуванні матриці її визначник не змінюється: $|A'| = |A|$.
3. Якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпця) матриці помножити на число λ , то її визначник збільшиться на число λ .
4. Якщо один визначник отримано з іншого перестановкою двох рядків (стовпців), то всі члени першого визначника будуть членами і другого, але зі зворотними знаками, тобто від перестановки двох рядків (стовпців) визначник лише змінює знак.
5. Якщо квадратна матриця містить два однакові рядки (стовпці), то її визначник дорівнює нулю.
6. Якщо елементи двох рядків (стовпців) матриці пропорційні, то її визначник дорівнює нулю.
7. Якщо всі елементи i -го рядка визначника n -го порядку представлені у виді суми двох доданків:

$$a_{ij} = b_j + c_j, \quad j=1, \dots, n$$

то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких усі рядки, крім i -го – такі ж, як і в заданому визначнику, а i -й рядок в одному з доданків складається з елементів b_j , а в іншому – з елементів c_j .

8. Сума добутків елементів якого-небудь рядка (стовпця) матриці на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) цієї матриці дорівнює 0, тобто $\sum_{s=1}^n a_{is} \cdot A_{js} = 0$ при $i \neq j$.
9. Якщо один з рядків матриці є лінійна комбінація його інших рядків, то визначник дорівнює нулю.
10. Визначник матриці не зміниться, якщо до елементів якого-небудь рядка (стовпця) матриці додати елементи іншого рядка (стовпця), попередньо помножені на те саме число.
11. Сума добутків довільних чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ на алгебраїчні доповнення елементів будь-якого рядка (стовпця) дорівнює визначнику матриці, отриманої з даною заміною елементів цього рядка (стовпця) на числа $b_1, b_2, \dots, b_n$.
12. Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добутку їхніх визначників: $|C| = |A| \cdot |B|$, де $C = A \cdot B$, A і B – матриці n -го порядку.

Лекція №2

Тема. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Питання лекції:

1. Системи лінійних рівнянь. Основні поняття і означення.
2. Метод оберненої матриці, формули Крамера, метод Гаусса.

1. Системи лінійних рівнянь. Основні поняття і означення

Система m лінійних рівнянь з n змінними має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1)$$

де a_{ij} , b_i ($i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$) – довільні числа, які називаються відповідно коефіцієнтами при змінних і вільних членах рівнянь.

У більш короткому записі за допомогою знаків підсумовування систему можна записати у виді:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (2)$$

Розв'язком системи (2) називається така сукупність n чисел $(x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n)$, при підстановці яких кожне рівняння системи обертається у вірну рівність.

Система рівнянь називається **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв'язок, і **несумісною**, якщо вона не має розв'язків.

Сумісна система рівнянь називається **визначеною**, якщо вона має єдиний розв'язок, і **невизначеною**, якщо вона має більш одного розв'язку.

Наприклад, система рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 20 \\ x_1 - x_2 = 10 \end{cases}$ – сумісна і визначена, тому що має єдиний розв'язок $(10; 0)$.

Система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ 2x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$ – несутимсна, а система рiвнянь $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}$ – сумiсна i невизначена, тому що має бiльш одного, а точнiше нескiнченну множину розв’язкiв ($x_1 = c$, $x_2 = 10 - 2c$, де c – будь-яке число).

Двi системи рiвнянь називаються **рiвносильними**, або **еквiвалентними**, якщо вони мають однакову множину розв’язкiв.

Запишемо систему (1) у матричнiй формi. Позначимо:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

де A – матриця коефiцiєнтiв при змiнних, або матриця системи; X – матриця-стовпець змiнних; B – матриця-стовпець вiльних членiв.

Оскiльки число стовпцiв матрицi $A_{m \times n}$ дорiвнює числу рядкiв матрицi $X_{n \times 1}$, то їх добуток

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

є матриця-стовпець. Елементами отриманої матрицi є лiвi частини системи (1). На пiдставi визначення рiвностi матриць систему (1) можна записати у видi

$$A \cdot X = B. \quad (3)$$

2. Метод оберненої матриці і формули Крамера

Нехай число рiвнянь системи (1) дорiвнює числу змiнних, тобто $m = n$. Тодi матриця системи є квадратна, а її визначник $\Delta = |A|$ називається **визначником системи**.

Розглянемо **розв’язок системи двох рiвнянь** iз двома змiнними:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \quad (4)$$

у якiй хоча б один з коефiцiєнтiв при змiнних вiдмiнний вiд нуля.

Для розв'язання цієї системи виключимо змінну x_2 , помноживши перше рівняння на a_{22} , друге – на $(-a_{12})$ і складемо їх. Потім виключимо змінну x_1 , помноживши перше рівняння на $(-a_{21})$, друге – на a_{11} і також складемо їх. У результаті одержимо систему:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{cases} \quad (5)$$

Вираз в дужках є визначник системи

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Позначивши $\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ система

(5) прийме вид:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_1 \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_2 \end{cases} \quad (6)$$

З отриманої системи випливає, що якщо визначник системи $\Delta \neq 0$, то система (4) має єдиний розв'язок, визначений за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Якщо $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$ (або $\Delta_2 \neq 0$), то система (4) несумісна, тому що в цьому випадку приводиться до виду: $\begin{cases} 0 \cdot x_1 = \Delta_1 \\ 0 \cdot x_2 = \Delta_2 \end{cases}$.

Якщо $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то система (4) невизначена і має нескінченну множину розв'язків, тому що в цьому випадку приводиться до виду: $\begin{cases} 0 \cdot x_1 = 0 \\ 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$.

Для одержання розв'язку системи (1) при $m = n$ в загальному виді припустимо, що квадратна матриця системи $A_{n \times n}$ не вироджена, тобто її визначник $|A| \neq 0$. У цьому випадку існує обернена матриця A^{-1} .

Помноживши зліва обидві частини матричної рівності (3) на матрицю A^{-1} , одержимо: $A^{-1} \cdot (AX) = A^{-1}B$. Оскільки $A^{-1} \cdot (AX) = (A^{-1}A) \cdot X = E \cdot X = X$, то розв'язком системи методом оберненої матриці буде матриця-стовпець

$$X = A^{-1} \cdot B. \quad (7)$$

Теорема Крамера. Нехай Δ – визначник матриці A системи, а Δ_j – визначник матриці, отриманий з матриці A заміною j -го стовпця стовпцем вільних членів. Тоді, якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв’язок, визначений за формулами:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

Формули (8) отримали назва формул Крамера.

Приклад. Розв’язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

а) методом оберненої матриці; б) за формулами Крамера.

Розв’язання. а) Позначимо $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}.$

Тоді в матричній формі дана система має вигляд: $A \cdot X = B$. Знайдемо визначник $|A|=5$. Оскільки $|A| \neq 0$, то матриця A – невироджена, і існує обернена матриця A^{-1} .

Матрицю A^{-1} знаходимо по розглянутому раніше алгоритму

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3-2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1-2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тепер за формулою (7)
$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3-2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1-2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$
 тобто

розв’язок системи $(4; 2; 1)$.

б) Знайдемо визначник системи $\Delta = |A| = 5$. Оскільки $\Delta \neq 0$, то за теоремою Крамера система має єдиний розв’язок.

Обчислимо визначники матриць Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , отриманих з матриці A , заміною відповідно першого, другого і третього стовпців стовпцем вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 8 + 11 - 8 - 3 + 22 = 20;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 22 + 3 + 16 - 11 - 8 - 12 = 10;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 5 + 3 = 5.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1.$$

Відповідь: (4; 2; 1).

Істотним недоліком розв'язання систем n лінійних рівнянь з n змінними за формулами Крамера і методом оберненої матриці є їх велика трудомісткість, зв'язана з обчисленням визначників і знаходженням оберненої матриці.

Метод Гаусса

Розглянемо розв'язок системи m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (9)$$

Метод Гаусса – метод послідовного виключення змінних полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень система рівнянь приводиться до рівносильної системи східчастого (або трикутного) виду з якої, послідовно, починаючи з останніх (за номером) змінних знаходяться всі інші змінні.

Це історично перший найбільш розповсюджений точний метод розв'язання систем лінійних рівнянь.

Елементарними перетвореннями системи називаються наступні перетворення:

- 1) перестановка будь-яких двох рівнянь;
- 2) множення обох частин одного з рівнянь на будь-яке відмінне від нуля число;
- 3) додавання до обох частин одного рівняння відповідних частин іншого, помножених на будь-яке число.

Легко перевірити, що елементарні перетворення приводять дану систему рівнянь в еквівалентну систему

Припустимо що в системі (1) коефіцієнт при змінній x_1 у першому рівнянні $a_{11} \neq 0$ (якщо це не так, то перестановкою рівнянь місцями доможемося того, що $a_{11} \neq 0$).

Перетворення Гаусса зручно проводити, здійснюючи перетворення не із самими рівняннями, а з матрицями їхніх коефіцієнтів. Така матриця має вигляд

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

і називається **розширеною матрицею системи (1)**, тому що в неї, окрім матриці системи A , додатково включений стовпець вільних членів.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18 \\ 3x_1 + 2x_3 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$$

Розв'язання.

Крок 1. Оскільки $a_{11} \neq 0$, то помноживши перший рядок матриці на (-2) , (-3) , (-2) і додаючи отримані рядки відповідно до другого, третього і четвертого рядків виключимо змінну x_1 з усіх рядків, починаючи з другого

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array} \right) \sim$$

В отриманій новій матриці $a_{22}^{(1)} = 0$, тому поміняємо місцями другу і третю рядки.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array} \right) \sim$$

Крок 2. Оскільки тепер $a_{22}^{(1)} = -4 \neq 0$, то помноживши другий рядок на (-7) , а четвертий на 4 і складаючи одержимо

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 54 & -36 & 18 \end{array} \right) \sim$$

Крок 3. Враховуючи, що $a_{33}^{(2)} = -8 \neq 0$, множимо третій рядок на 54 , а четверту на 8 і складаємо, одержимо

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -234 & 468 \end{array} \right).$$

Перейдемо від матричного запису до запису у виді системи.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 & x_1 = 1 \\ -4x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -14 & x_2 = 2 \\ -8x_3 + x_4 = 6 & x_3 = -1 \\ -234x_4 = 468 & x_4 = -2 \end{array} \right. \Rightarrow$$

Використовуючи зворотний хід методу Гаусса, знайдемо з четвертого рівняння $x_4 = -2$,

із третього рівняння $-8x_3 - 2 = 6 \Rightarrow x_3 = -1$,

із другого рівняння $-4x_2 + 10 - 16 = -14 \Rightarrow x_2 = 2$,

з першого рівняння $x_1 + 4 - 3 + 4 = 6 \Rightarrow x_1 = 1$.

Т. т. Розв'язком системи є $(1; 2; -1; -2)$.

Лекція № 3

Тема: *Вектори. Операції над векторами. Добуток векторів.*

Питання лекції:

1. Скалярні і векторні величини. Лінійні операції над векторами: складання і віднімання векторів, множення вектора на число, проекція вектора на вісь.
2. Лінійна залежність і незалежність векторів, базис. Розкладання вектора по ортонормованому базису. Довжина вектора. Напрямні косинуси.
3. Лінійні дії з векторами, заданими розкладом в ортонормованому базисі. Умови колінеарності векторів.
4. Скалярний добуток векторів, його означення, фізичний зміст, властивості.
5. Скалярний добуток векторів в координатній формі. Умови перпендикулярності двох векторів. Кут між векторами.
6. Векторний добуток векторів, його означення, механічний зміст, властивості.
7. Векторний добуток векторів в координатній формі.
8. Мішаний добуток векторів, його геометричний зміст, властивості.
9. Мішаний добуток векторів в координатній формі. Умова компланарності векторів.

1. **Скалярні і векторні величини. Лінійні операції над векторами: складання і віднімання векторів, множення вектора на число, проекція вектора на вісь**

Величини, з якими ми зустрічаємося в механіці, фізиці і в інших прикладних дисциплінах бувають подвійного значення: скалярні і векторні.

Приклади скалярних величин: площа, об'єм, довжина відрізка, маса, час і т.п. **Приклади векторних величин:** сила, момент, швидкість, прискорення, і т.п.

Величина, яка характеризується числовим значенням і напрямком, носять назву – **вектора**.

Числове значення вектора називається його модулем. Позначається $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.

Графічно вектор позначають відрізком зі стрілкою на кінці. Довжина відрізка у вибраному масштабі відповідає модулю вектора. Стрілка вказує напрямок.

Вектор, модуль якого дорівнює одиниці, має назву – **одиничного** (ще його називають **ортом**). В подальшому будемо зустрічатися з таким поняттям як ортонормований базис.

Вектор, модуль якого дорівнює нулю, носить назву **нульового**.

Два вектори вважаються рівними, якщо вони мають однакову довжину, паралельні і направлені в один і той же бік.

Вектори, рівні по модулю, паралельні, але мають напрямки в протилежні боки називаються – **взаємо протилежними**.

На відміну від векторів, величини які не мають напрямку називаються – **скалярами**.

2. Лінійні операції над векторами

1. Додавання векторів

Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий третій вектор $\vec{c}$, який виходить з їх спільного початку, і є діагоналлю паралелограму, сторонами якого служать доданки векторів (рис. 1).

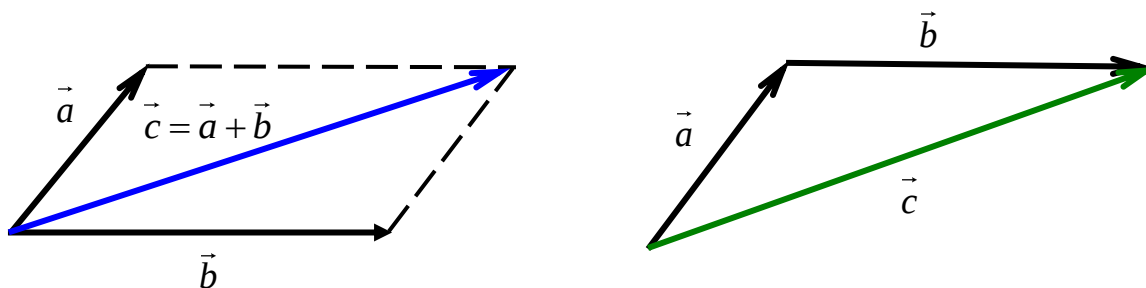


Рис. 1

2. Віднімання векторів

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий третій вектор $\vec{c}$, для якого сума $\vec{b}$ і $\vec{c}$ дорівнює $\vec{a}$ (рис. 2).

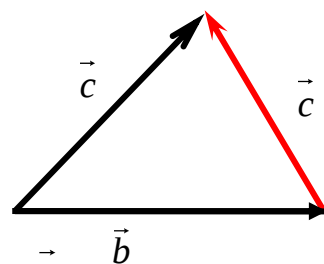


Рис. 2

3. Множення вектора на число $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$

$$1) 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}; \quad 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}; \quad k \cdot \vec{0} = \vec{0}; \quad (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a};$$

$$2) |\vec{k}\vec{a}| = |\vec{k}| \cdot |\vec{a}|;$$

$$3) \begin{matrix} k \cdot \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{a} & k \cdot \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{a} \\ k \geq 0 & k \leq 0 \end{matrix};$$

$$4) \text{ асоціативний закон } k \cdot (m \cdot \vec{a}) = (k \cdot m) \cdot \vec{a};$$

$$5) \text{ дистрибутивний закон відносно скалярних множників } (k + m) \cdot \vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a};$$

$$6) \text{ дистрибутивний закон відносно векторів } k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}.$$

Базис. Розкладання вектора по базису

Три одиничних попарно перпендикулярних вектори взятих в обумовленій черзі називають *ортонормованим* (або прямокутним) базисом в просторі.

Вектори прямокутного базису прийнято позначати $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Кожний вектор $\vec{a}$ єдиним образом зображується у вигляді

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Числа x, y, z називають координатами вектора $\vec{a}$ в базисі $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Розглянемо деяку вісь l в просторі і нехай α, β, γ – кути які вона утворює в просторі

з осями координат.

Числа $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – називаються **напрямними косинусами** цієї осі.

Напрямні косинуси зв'язані співвідношенням

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Сума квадратів напрямних косинусів будь-якої осі дорівнює одиниці.

Довжина вектора

Нехай x, y, z – проекції вектора $\vec{a}$ відповідно на осі Ox, Oy, Oz , тоді довжина вектора $\vec{a}$ дорівнює

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Довжина вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його проекцій

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

3. Лінійні дії з векторами, заданими розкладом в ортонормованому базисі. Умови колінеарності векторів

Нехай задані два вектора своїм розкладом в ортонормованому базисі

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \qquad \vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k};$$

а) При складанні векторів однойменні проекції їх складуються

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2) \vec{i} + (y_1 + y_2) \vec{j} + (z_1 + z_2) \vec{k};$$

б) Щоб відняти два вектори, треба відняти їх проекції

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2) \vec{i} + (y_1 - y_2) \vec{j} + (z_1 - z_2) \vec{k};$$

в) Щоб помножити вектор на число треба помножити його проекції на число

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda x_1 \vec{i} + \lambda y_1 \vec{j} + \lambda z_1 \vec{k}.$$

4. Скалярний добуток векторів, його означення, фізичний зміст, властивості

Задача № 1. Треба знайти роботу сили $\vec{F}$, якщо точка, на яку діє сила, здійснила переміщення $|\vec{OA}|$ рівне $|\vec{S}|$.

Якщо точка пересувається по напрямку сили, то по означенню, робота сили дорівнює добутку величини сили на довжину переміщення, тобто $\vec{F} \cdot \vec{S}$.

Якщо ж точка пересувається під кутом φ до напрямку сили, то працює тільки той доданок сили $\vec{OF}$, що має напрям по лінії OA , а перпендикулярний доданок урівноважиться опором (рис.2).

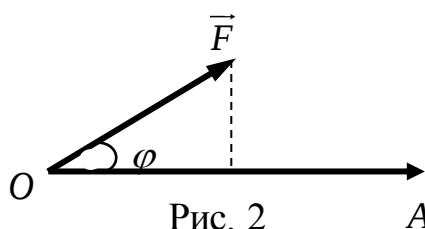


Рис. 2

$$\text{пр.}\vec{F} = |\vec{F}| \cdot \cos \varphi.$$

Отже, робота сили дорівнює: $\text{пр.}|\vec{F}| \cdot |\vec{S}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cos \varphi$.

Скалярним добутком двох векторів називається число рівне добутку їх довжин, помноженому на косинус кута між ними

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

або $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$

Скалярний добуток двох векторів дорівнює довжині одного з них помноженого на проекцію другого вектора по напрямку першого.

Основні властивості скалярного добутку

Алгебраїчні властивості скалярного добутку

1°. Скалярний добуток обертається в нуль в тому і тільки в тому випадку, коли, по крайній мірі, один із векторів є нульовим, або якщо вектори перпендикулярні.

2°. Скалярний добуток має **властивість комутативності** $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$. Це впливає із означення.

3°. До скалярного добутку можна застосувати **дистрибутивний закон**.

Щоб помножити суму векторів треба помножити кожний доданок, і скласти отримані добутки

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

4°. **Асоціативна властивість** відносно множення на число λ :

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Геометричні властивості скалярного добутку

5°. Якщо $\vec{a} \neq 0$ і $\vec{b} \neq 0$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, коли кут $(\vec{a}, \vec{b})$ – гострий і $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, коли кут $(\vec{a}, \vec{b})$ – тупий.

6°. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2, \text{ звідки } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}.$$

5. Скалярний добуток векторів в координатній формі. Умови перпендикулярності двох векторів. Кут між векторами

Позначимо через (x_1, y_1, z_1) проекції вектора $\vec{a}$ на координатні вісі; а через (x_2, y_2, z_2) відповідно проекції вектора $\vec{b}$. Виразимо скалярний добуток векторів через ці проекції

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k})$$

За властивістю дистрибутивності суми векторів перемножуються як многочлени. Отже, матимемо

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} = & x_1 x_2 \vec{i} \cdot \vec{i} + y_1 x_2 \vec{j} \cdot \vec{i} + z_1 x_2 \vec{k} \cdot \vec{i} + y_1 y_2 \vec{j} \cdot \vec{j} + y_1 z_2 \vec{j} \cdot \vec{k} + z_1 y_2 \vec{k} \cdot \vec{j} + \\ & + z_1 z_2 \vec{k} \cdot \vec{k}. \end{aligned}$$

Оскільки $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – три взаємно перпендикулярних одиничних вектора, то $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$, $\vec{k} \cdot \vec{i} = 0$, $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$, $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$, $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

Скалярний добуток векторів дорівнює сумі добутків однойменних проекцій.

Умова перпендикулярності двох векторів: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$,

тобто $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$.

Кут між двома векторами обчислюється зі скалярного добутку векторів

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

6. Векторний добуток векторів, його означення, механічний зміст, властивості

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, називається новий вектор $\vec{c}$ довжина якого чисельно дорівнює площині паралелограма, побудованого на

векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, перпендикулярний до площини цих векторів і направлений в той бік, що найкоротший поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ біля набутого вектора $\vec{c}$ відбувається проти часової стрілки, якщо дивитися з кінця вектора $\vec{c}$.

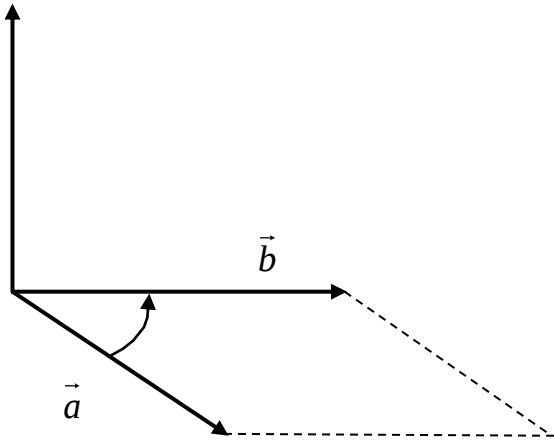
Якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$ то $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

Із означення векторного добутку

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}).$$

Векторний добуток позначається

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}, \text{ або } \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}].$$



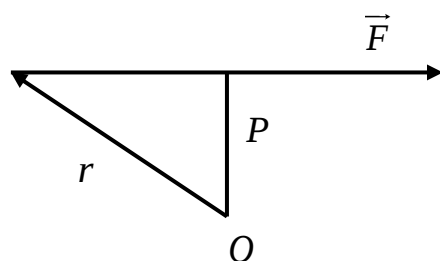
Векторний добуток дорівнює нульовому вектору в тому і тільки в тому випадку, коли по крайній мірі один

з векторів є нульовим, або, якщо ці вектори паралельні (колінеарні). Таким чином, умовою колінеарності векторів є векторний добуток рівний нулю $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

Зауваження. Умову колінеарності двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна записати так: $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні, то $\sin(\vec{a}, \vec{b}) = 1$ і тому довжина вектора-добутку дорівнює добутку довжин векторів співмножників:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|, \text{ якщо } \vec{a} \perp \vec{b}.$$



В механіці часто застосовується поняття моменту сили відносно даної точки.

Якщо сила $\vec{F}$ прикладена до точки A , то моментом сили $\vec{F}$ відносно точки O називається вектор $\vec{M}$, означений формулою

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Із означення векторного добутку випливає, що величина моменту дорівнює величині сили, помноженої на відстань OP точки O до прямої, вздовж якої діє сила.

Основні властивості векторного добутку:

1. При переміщенні доданків векторний добуток помножується на (-1) , тобто

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}).$$

2. Векторний добуток має властивість сполучення відносно числового множника, ця властивість відображується наступними формулами

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b}, \text{ або } \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}),$$

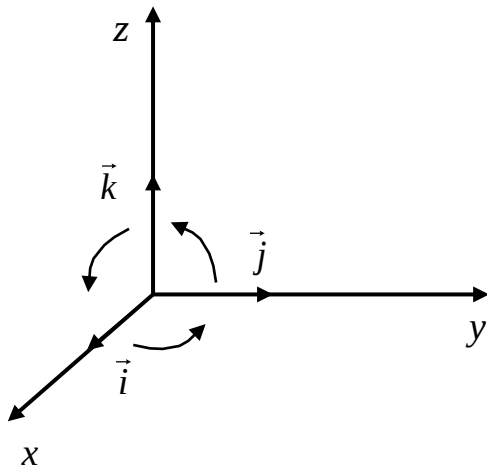
тобто, щоб помножити векторний добуток векторів на число, достатньо помножити на це число один із доданків.

3. Векторний добуток підлягає розподільному закону, тобто

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

7. Векторний добуток векторів в координатній формі

Нехай задані вектори своїми координатами $\vec{A}(x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{B}(x_2, y_2, z_2)$. Виразимо через ці вектори векторний добуток векторів.



$$\vec{a} \times \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}).$$

За властивостями 1–3 суми векторів помножуються як многочлени. Отже, матимемо:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} = & x_1x_2(\vec{i} \times \vec{i}) + y_1x_2(\vec{j} \times \vec{i}) + z_1x_2(\vec{k} \times \vec{i}) + \\ & + x_1y_2(\vec{i} \times \vec{j}) + y_1y_2(\vec{j} \times \vec{j}) + z_1y_2(\vec{k} \times \vec{j}) + x_1z_2(\vec{i} \times \vec{k}) + \\ & + y_1z_2(\vec{j} \times \vec{k}) + z_1z_2(\vec{k} \times \vec{k}). \end{aligned}$$

Оскільки $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ зображають собою три взаємно перпендикулярних одиничних вектори і обертання від $\vec{j}$ до $\vec{k}$ наводиться з кінця вектора $\vec{i}$ здійснюваним проти часової стрілки, то $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$.

$$\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}; \quad \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}; \quad \vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}.$$

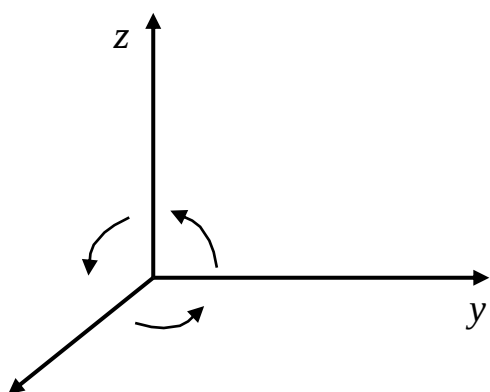
Отже,

$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{i} + (z_1 x_2 - z_2 x_1) \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k} \quad (*)$$

Формулу (*) можна записати у вигляді $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$.

8. Мішаний добуток векторів, його геометричний зміст, властивості

Векторно-скалярний добуток $(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ трьох не компланарних векторів є число, абсолютна величина якого відповідає об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, як на ребрах. Знак добутку додатний, якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють систему, однойменну з основною, і від'ємний в протилежному випадку.



Кругова перестановка трьох множників векторно-скалярного добутку не змінює його величини. Перестановка двох сусідніх множників змінює знак добутку:

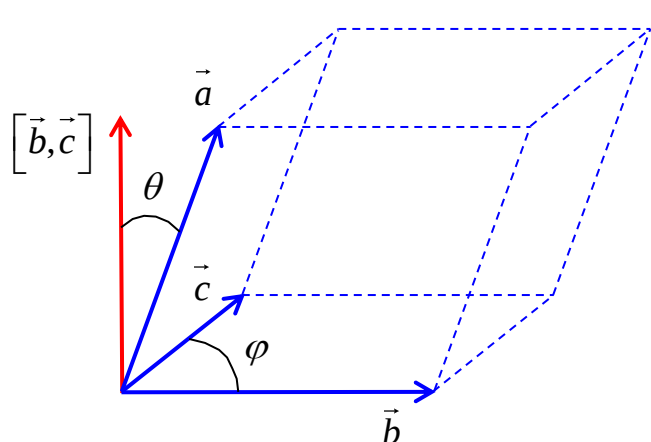
$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{b}\vec{c}\vec{a}) = (\vec{c}\vec{a}\vec{b}) = -(\vec{b}\vec{a}\vec{c}) = -(\vec{c}\vec{b}\vec{a}) = -(\vec{a}\vec{c}\vec{b})$$

Рівність $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0$, є необхідною умовою компланарності векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Властивості мішаного добутку векторів

1. ♦ Мішаний добуток дорівнює нулю тоді, і тільки тоді, коли співмножники компланарні.

2. ♦ Якщо в правому ортонормованому базису $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, то мішаний добуток векторів



$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

3. ♦ Базис $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ є правим тоді і тільки тоді, коли мішаний добуток $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$.

4. ♦ Якщо в мішаному добутку два множники однакові, то він дорівнює 0.

5. ♦ Якщо вектори записані у вигляді: $\vec{a} = a_x \vec{e}_1 + a_y \vec{e}_2 + a_z \vec{e}_3$; $\vec{b} = b_x \vec{e}_1 + b_y \vec{e}_2 + b_z \vec{e}_3$; $\vec{c} = c_x \vec{e}_1 + c_y \vec{e}_2 + c_z \vec{e}_3$, то

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3).$$

6. ♦ Об'єм паралелепіпеду, побудованого на некопланарних векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, дорівнює модулю мішаного добутку цих векторів.

7. ♦ Мішаний добуток лінійний по кожному з співмножників.

9. Мішаний добуток векторів в координатній формі. Умова компланарності векторів

Нехай дані вектори $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (**)$$

Задача. Дано координати вершин піраміди: $A(-5; -3; 1)$, $B(6; 7; -1)$, $C(-14; -15; 4)$, $D(-1; 5; 3)$.

Потрібно: 1) записати вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ в системі орт і знайти модулі цих векторів; 2) знайти кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$; 3) знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$; 4) знайти площу грані ABC ; 5) знайти об'єм піраміди $ABCD$.

Розв'язання.

1. Відомо, що довільний вектор $\vec{a}$ може бути представлений у системі орт $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ за формулою:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad (1)$$

де a_x , a_y , a_z – проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі Ox , Oy , Oz , а $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ – одиничні вектори, напрямки яких збігаються з додатними напрямками осей Ox , Oy і Oz .

Якщо дані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то проекції вектора $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ на координатні осі знаходяться за формулами:

$$a_x = x_2 - x_1; a_y = y_2 - y_1; a_z = z_2 - z_1 \quad (2)$$

і

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}. \quad (3)$$

Підставляючи в (3) координати точок A і B , одержимо:

$$\overrightarrow{AB} = [6 - (-5)]\vec{i} + [7 - (-3)]\vec{j} + (-1 - 1)\vec{k} = 11\vec{i} + 10\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Аналогічно, підставивши в (3) координати точок A і C знаходимо:

$$\overrightarrow{AC} = -9\vec{i} - 12\vec{j} + 3\vec{k}, \text{ А і } D, \text{ знаходимо: } \overrightarrow{AD} = 4\vec{i} + 8\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Відомо, що модуль вектора $\vec{a}$, заданого в системі орт формулою (1), обчислюється за формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (4)$$

Застосовуючи (4), одержимо:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{11^2 + 10^2 + (-2)^2} = 15;$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-9)^2 + (-12)^2 + 3^2} = \sqrt{234} = 3\sqrt{26};$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{4^2 + 8^2 + 2^2} = 2\sqrt{21}.$$

2. Відомо, що косинус кута між двома векторами дорівнює скалярному добуткові цих, векторів, поділеному на добуток їхніх модулів. Отже,

$$\cos \varphi = \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{11 \cdot (-9) + 10 \cdot (-12) + (-2) \cdot 3}{15 \cdot 3\sqrt{26}} = \frac{-225}{45\sqrt{26}} = -\frac{5}{\sqrt{26}} = -\frac{5\sqrt{26}}{26} \approx -0,9806$$

$$\varphi = \arccos(-0,9806) \approx 168^\circ 42'.$$

3. Запишемо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$$

Оскільки добуток $|\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$ виражає собою проекцію вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$, то маємо

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \text{Пр}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AD},$$

$$\text{Відкіля} \quad \text{Пр}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$, а також модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ знайдені раніше в п. 1. Підставляючи ці дані в (5), одержимо

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AD} = \frac{11 \cdot 4 + 10 \cdot 8 + (-2) \cdot 2}{15} = 8.$$

Таким чином, проекція вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$ дорівнює 8.

4. Площа грані ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Позначимо векторний добуток вектора

$\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\vec{P}$. Тоді, як відомо, модуль вектора $\vec{P}$ виражає собою площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

Отже, площа грані ABC дорівнює половині модуля вектора $\vec{P}$, тобто

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{P}|.$$

$$\vec{P} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 11 & 10 & -2 \\ -9 & -12 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 15\vec{j} - 42\vec{k};$$

$$|\vec{P}| = \sqrt{6^2 + (-15)^2 + (-42)^2} = \sqrt{2025} = 45; \quad S_{ABC} = 22,5 \text{ (од.}^2\text{)}$$

Відомо, що об'єм паралелепіпеда, побудованого на трьох некомпланарних векторах, дорівнює абсолютній величині їхнього мішаного добутку. Якщо вектори, що перемножуються, розкладені по ортонормованому базису

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}; \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}; \quad \vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k},$$

то мішаний добуток цих векторів знаходиться за формулою

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (6)$$

Застосовуючи (6), визначимо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$.

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 11 & 10 & -2 \\ -9 & -12 & 3 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -180.$$

Отже, об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$, дорівнює 180. Оскільки об'єм V шуканої піраміди $ABCD$ дорівнює одного шостий об'єму знайденого паралелепіпеда, то

$$V = \frac{1}{6} \cdot 180 = 30.$$

Лекція № 4
Тема: Пряма лінія на площині.

Питання лекції:

1. Поняття про рівняння лінії. Загальне рівняння прямої на площині і його дослідження.
2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Рівняння прямої, що проходить через дану точку в заданім напрямку. Жмут прямих.
3. Рівняння прямої, що проходить через дві точки. Рівняння прямої у відрізках.
4. Кут між двома прямими.
5. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.
6. Відстань від точки до прямої.

1. Поняття про рівняння лінії. Загальне рівняння прямої на площині і його дослідження

Рівняння між змінними x і y , якому задовольняють координати будь-якої точки, що лежить на лінії, і не задовольняють координати ні одної точки, що не лежить на ній, називається рівнянням даної лінії.

Входячи в рівняння координати x і y довільної точки лінії називаються поточними координатами.

Всяка лінія, розглядувана як геометричне місце точок, визначається рівнянням між координатами її точок. Навпаки, всяке рівняння між двома змінними x і y , визначає лінію як геометричне місце точок, координати яких x і y йому задовольняють.

Із розглянутого слідує постановка двох задач:

1. Дано рівняння лінії як геометричне місце точок. Скласти рівняння цієї лінії.
2. Дано рівняння між координатами x і y . Побудувати лінію, визначену цим рівнянням.

В прямокутній системі координат положення точки M визначається її координатами $(x; y)$. Множині точок відповідає множина таких пар чисел. Властивість загальна для всіх точок лінії може бути виражена співвідношенням, яке зв'язує координати x і y цих точок.

Загальне рівняння лінії

Загальне рівняння першої степені відповідно x і y має вигляд

$$Ax + By + C = 0 \quad (1)$$

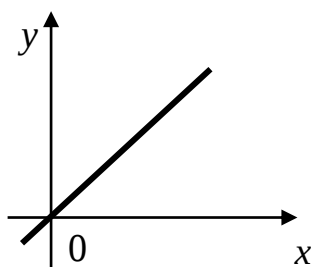
Тут A, B, C – довільні числа; при цьому A і B не можуть бути одночасно рівними нулю.

Розв'язавши рівняння (1) відносно y , отримаємо $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$,

де, вводячи позначення $-\frac{A}{B} = k$; $-\frac{C}{B} = b$ матимемо $y = kx + b$. (2)

Рівняння (2) є рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.

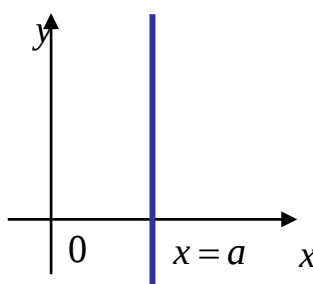
Розглянемо часткові випадки (1)



а) $C = 0$, $Ax + By = 0$, звідси

$$y = -\frac{A}{B}x \text{ або } y = kx, \text{ де } k = -\frac{A}{B}.$$

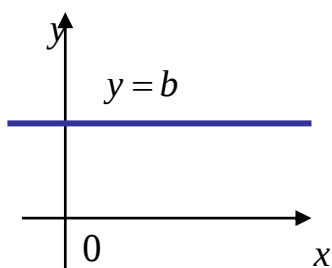
Це рівняння прямої, яка проходить через початок координат.



б) $C = 0$; $Ax + C = 0$, звідси

$$x = -\frac{C}{A} \text{ або } x = a, \text{ де } a = -\frac{C}{A}.$$

$x = a$ – рівняння прямої, паралельної осі Oy і відтинаючої на осі Ox відрізок a .

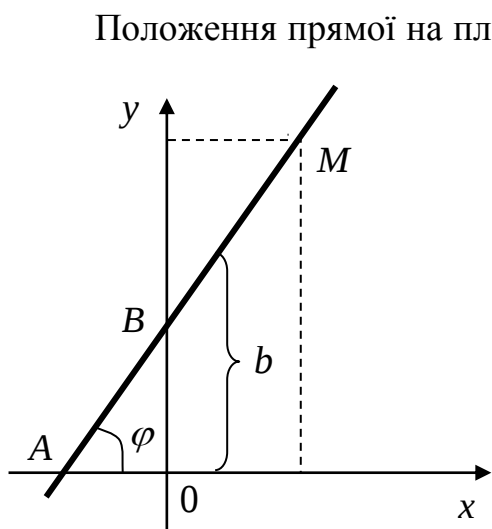


в) $A = 0$; $By + C = 0$, звідки

$$y = -\frac{C}{B} \text{ або } y = b, \text{ де } b = -\frac{C}{B}.$$

$y = b$ є рівняння прямої паралельної осі Ox і відтинаючої на осі Oy відрізок b .

2. Рівняння прямої на площині з кутовим коефіцієнтом. Рівняння Прямой, що проходить через дану точку в заданім напрямку. Жмут прямих



Положення прямої на площині буде цілком визначено, якщо задати кут нахилу прямої до осі абсцис і величину відрізка, відтинаючого нею на осі ординат.

Розглянемо направлений відрізок $\overline{BM}$

$$B(0; b), M(x, y).$$

Виразимо проєкції $\overline{BM}$ на координатні осі: $\text{і } \check{\delta}_x \overline{BM} = x$, $\text{і } \check{\delta}_y \overline{BM} = y - b$

$$\text{Тоді отримаємо: } \operatorname{tg} \varphi = \frac{y - b}{x}.$$

Звідси $y - b = x \cdot \operatorname{tg} \varphi$ або $y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi + b$, або $y = kx + b$, де $k = \operatorname{tg} \varphi$.

$$y = kx + b \quad (3)$$

(3) – рівняння прямої на площині з кутовим коефіцієнтом.

Нехай дана точка $A(x_1, y_1)$ і кутовий коефіцієнт k , який визначає напрямок прямої, що проходить через точку A . Рівняння цієї прямої будемо записувати у вигляді $y = kx + b$.

Підставивши в це рівняння координати точки A отримаємо $y_1 = kx_1 + b$

Звідси визначимо b : $b = y_1 - kx_1$. Тоді $y = kx + y_1 - kx_1 \Rightarrow$

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (4)$$

Зауваження. Сукупність усіх прямих, що проходять через деяку точку площини, називається жмутом (в'язкою) прямих, а загальна їх точка – центром жмута.

3. Рівняння прямої, що проходить через дві точки. Рівняння прямої у відрізках

Нехай дані точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$. Складемо рівняння прямої, що проходить через ці точки.

Рівняння жмута прямих, що проходять через точку $A(x_1, y_1)$ має вигляд (4).

Щоб виділити з цього жмута пряму, яка проходить через точку $B(x_2, y_2)$, потрібно щоб координати цієї точки задовольняли рівнянню.

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \quad (5)$$

Розв'язавши разом рівняння (4) і (5) і виключивши k , отримаємо

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (6)$$

Якщо задано вектор $\vec{s} = \{l, m\}$, паралельний деякій прямій, і точку $M_0(x_0, y_0)$ на цій прямій, то рівняння прямої можна записати у вигляді

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$$

Нехай відомі довжини відрізків $|AO| = a$, $|OB| = b$. Тоді точка A має координати $(-a; 0)$, а точка B – $(0, b)$. Скориставшись формулою (6), отримаємо:

$$\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x + a}{0 + a}.$$

Або поділивши праву частину рівняння почленно і перенісши змінні в ліву частину, матимемо:

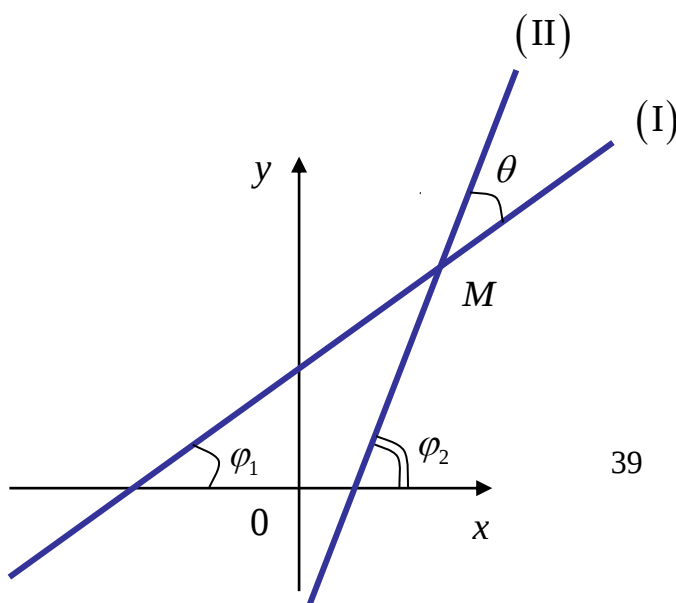
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (7)$$

Рівняння (7) носить назву **рівняння прямої у відрізках**.

4. Кут між двома прямими

Нехай прямі (I) і (II) задані рівняннями $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$.

Позначимо через φ_1 кут нахилу прямої (I) до осі Ox , а



через θ кут, на який потрібно повернути пряму (І) до співпадання з (ІІ).
Тоді $\varphi_1 + \theta = \varphi_2$.

Звідси $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$ і якщо прямі не є перпендикулярними, то

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2}$$

Замітимо, що $\operatorname{tg} \varphi_1 = k_1$ і $\operatorname{tg} \varphi_2 = k_2$, отримаємо
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \quad (8)$$

Зауваження 1. Формула (8) визначає тангенс кута, утвореного обертанням навколо точки M прямої з кутовим коефіцієнтом k_1 , до суміщення її з прямою, що має кутовий коефіцієнт k_2 .

Зауваження 2. Якщо не встановлено порядку, в якому розглядаються прямі, то можна встановити цей порядок довільно. При цих змінах порядку може змінюватися знак тангенсу кута.

Зауваження 3. Якщо хоча б одна з прямих паралельна осі Oy , то формула (8) не має змісту. В цьому випадку $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$, де друга пряма паралельна осі Ox .

5. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих

Прямі паралельні, якщо у них рівні кути нахилу до осі Ox , тобто $\varphi_1 = \varphi_2$, а отже, $\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2$ або $k_1 = k_2$.

$k_1 = k_2$ — умовою паралельності двох прямих є рівність їх кутових коефіцієнтів.

Кут між взаємно перпендикулярними прямими дорівнює $\frac{\pi}{2}$

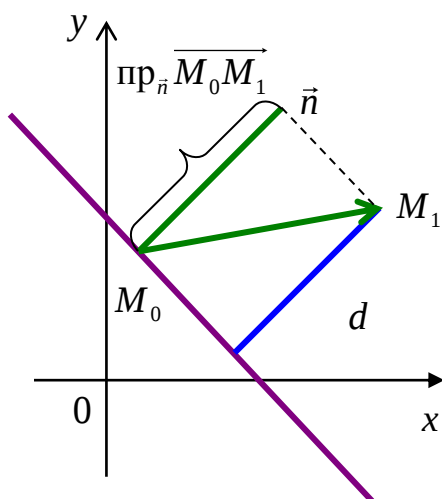
$$\frac{\pi}{2} = \varphi_2 - \varphi_1, \text{ звідси } \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} \left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{ctg} \varphi_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_1}$$

або $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, або $k_1 \cdot k_2 = -1$ – прямі взаємно перпендикулярні, якщо їх кутові коефіцієнти зворотні по абсолютній величині і протилежні по знаку.

6. Відстань від точки до прямої

Дано загальне рівняння прямої (1) і точку $M_1(x_1, y_1)$. Знайдемо відстань d від точки M_1 до прямої (1). Візьмемо точку $M_0(x_0, y_0)$ на цій прямій.



Тоді відстань від точки M_1 до прямої дорівнює проекції вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ на вектор нормалі $\vec{n} = \{A, B\}$. Записуємо аналітичний вираз для шуканої відстані:

$$d = \left| \text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0M_1} \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1}|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Оскільки $-Ax_0 - By_0 = C$, то остаточно маємо:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Лекція №5

Тема: Диференціальне числення функцій однієї змінної.

Питання лекції:

1. Похідна, її механічний, геометричний і аналітичний зміст.
2. Диференціювання функцій і неперервність.
3. Диференціювання суми, добутку, частки.
4. Похідна складної функції.
5. Похідна логарифмічної функції.
6. Похідна степеневі функції.
7. Похідна показникової функції.
8. Похідна степенєво-показникової функції.
9. Похідна від тригонометричної функції.
10. Логарифмічне диференціювання.

1. Похідна, її механічний, геометричний і аналітичний зміст

Нехай маємо функцію $y = f(x)$ з однозначною відповідністю. Якщо аргумент x отримав деякий (додатній чи від'ємний) приріст Δx , то тоді функція y отримає деякий приріст Δy .

Таким чином, $x + \Delta x \Rightarrow y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

Знайдемо приріст функції Δy : $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Тепер знайдемо границю відношення при $\Delta x \rightarrow 0$. Якщо ця границя існує, то її називають похідною даної функції $f(x)$ і позначають $f'(x)$.

Т.ч. за означенням :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{або} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Означення. Похідною даної функції $y = f(x)$ по аргументу x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу при умові що приріст аргументу прямує до нуля.

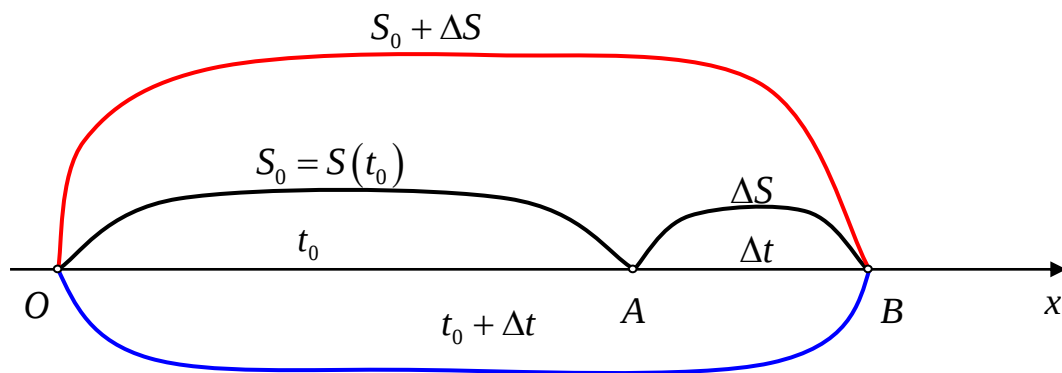
Похідна є функцією від x . Позначення похідної: y' , y'_x , $\frac{dy}{dx}$.

Якщо задане конкретне значення похідної, то $f'(a)$ або $y'|_{x=a}$.

Операція знаходження похідної функції називається диференціюванням даної функції.

Механічний зміст похідної. Задача. Матеріальна точка рухається по прямій. Залежність пройденого шляху від часу виражається формулою $S = S(t)$ (закон руху). Знайти миттєву швидкість точки в момент часу t_0 .

Нехай за час t_0 – точка пройшла шлях $S_0 = S(t_0)$. Потрібно знайти швидкість цієї точки в точці t_0 . Припустимо, що за час Δt точка перемістилася з положення A в положення B .



За час Δt вона перемістилася на відстань ΔS . Тоді середня швидкість точки на шляху AB , $V_{\text{cp}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

Для знаходження миттєвої швидкості (швидкості в точці t_0) знайдемо границю цього відношення при умові, що $\Delta t \rightarrow 0$.

$$V_{\text{мит.}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}.$$

Таким чином, ми бачимо, що :

$$V_{\text{мит.}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

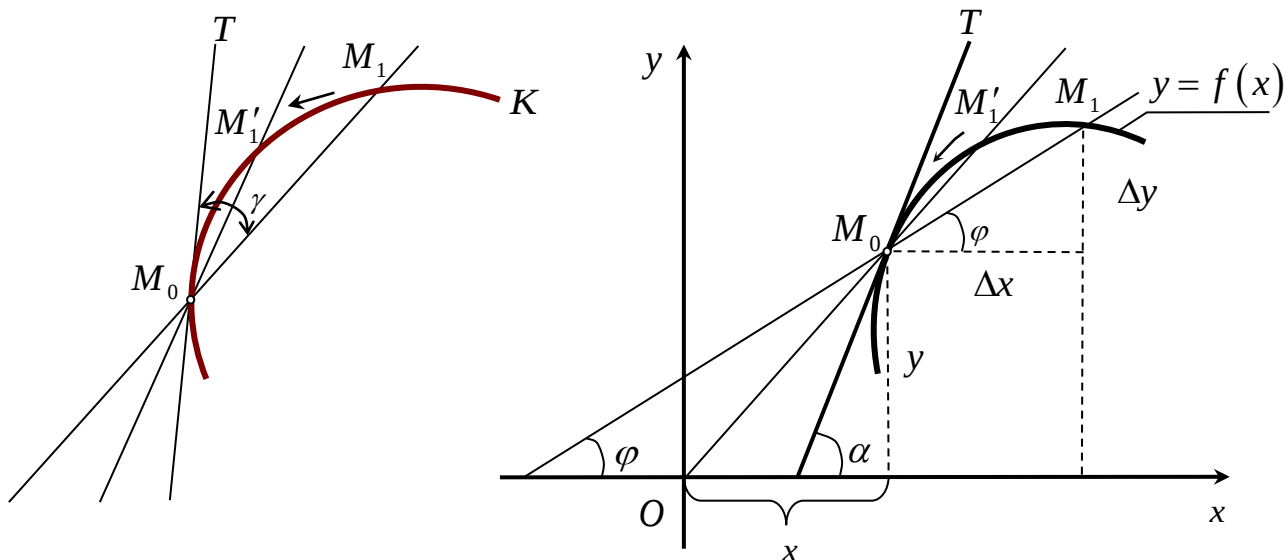
В цьому і полягає механічний зміст похідної.

Геометричний зміст похідної. Похідна від функції $y = f(x)$ має дуже простий і наглядний геометричний зміст, зв'язаний з поняттям дотичної.

Нехай маємо криву і на ній фіксовану точку M_0 . Візьмемо на кривій точку M_1 і проведемо січну M_0M_1 . Якщо точка M_1 наближається по кривій до точки M_0 , то січна M_0M_1 буде займати різні положення $M_0M'_1$, $M_0M''_1$ і т.д.

Якщо при необмеженому наближенні точки M_1 по кривій до точки M_0 з обої сторони січна прямує зайняти положення визначеної прямої M_0T , то пряма M_0T називається дотичною до кривої в точці M_0 .

Розглянемо функцію $f(x)$ і криву $y = f(x)$ (рис.). Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то точка M_1 буде переміщуватися вздовж кривої, наближаючись до M_0 . Січна M_0M_1 буде повертатися навколо точки M_0 і кут φ буде змінюватися з зміною Δx .

Якщо при $\Delta x \rightarrow 0$ кут φ прямує до деякої границі α , то пряма, що проходить через M_0 і складає з додатним напрямком осі абсцис кут α , буде шуканою дотичною. Неважко знайти її кутовий коефіцієнт:

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Отже, $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$. Таким чином, значення похідної $f'(x)$ при даному значенні аргументу x дорівнює аргументу кута, утвореного з додатним напрямком осі Ox дотичною до графіку функції $f(x)$ в відповідній точці $M_0(x_0, y_0)$.

Аналітичний зміст похідної. Аналітичний зміст похідної – швидкість зміни функції в даній точці

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = V(x).$$

2. Диференціювання функцій і неперервність

Означення. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в точці $x = x_0$, т.т. існує

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то функція диференційована в точці x_0 , або має в цій точці похідну.

Означення. Якщо функція диференційована в кожній точці деякого відрізка $[a; b]$ або інтервалу $(a; b)$, то кажуть, що вона диференційована на відрізка $[a; b]$ або відповідно в інтервалі $(a; b)$.

Встановимо зв'язок між поняттям диференційованості і неперервності функції в точці.

Теорема. Якщо функція диференційована в даній точці, то вона неперервна в цій точці.

Приклад. Дана неперервна функція $y = \sqrt[3]{x}$. Знайдемо її похідну $y' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$, яка при $x = 0$ не існує.

Теорема 1. Похідна сталої дорівнює нулю, т.т., якщо $y = C$, де $C = \text{const}$, то $y' = 0$.

Доведення.

Нехай $y = f(x) = C$. Надамо аргументу x приросту Δx ($\Delta x \neq 0$). Якщо $C = \text{const}$, то

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = C.$$

Отже, приріст функції дорівнює $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0$.

Відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ і тоді, $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, т.т. $y' = 0$.

Графіком функції $y = C$ є пряма паралельна осі Ox . Дотична до графіку в кожній її точці співпадає з цією прямою і, тому, утворює з віссю Ox кут, тангенс якого y' дорівнює нулю.

Теорема 2. Сталий множник можна виносити за знак похідної, т.т. якщо $y = Cu(x)$, де $C = \text{const}$, то $y' = C \cdot u'(x)$.

Доведення.

$$y = C \cdot u(x); \quad y + \Delta y = C \cdot u(x + \Delta x);$$

$$\Delta y = Cu(x + \Delta x) - Cu(x) = C[u(x + \Delta x) - u(x)];$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}; \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = C \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}, \quad \text{т.т.}$$

$$y' = Cu'(x).$$

3. Диференціювання суми, добутку, частки

Теорема 3. Похідна суми скінченного числа диференційованих функцій дорівнює відповідній сумі похідних цих функцій.

Для випадку 3-х функцій $y = u(x) + V(x) + W(x)$,
 $y' = u'(x) + V'(x) + W'(x)$.

Доведення.

Для значення аргументу x $y = u + V + W$ (аргумент x в позначеній функції для скорочення опустимо).

Для значення аргументу $x + \Delta x$ матимемо:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (V + \Delta V) + (W + \Delta W),$$

$$\Delta y = \Delta u + \Delta V + \Delta W, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta V}{\Delta x} + \frac{\Delta W}{\Delta x}.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta x} \quad \text{або} \quad y' = u'(x) + V'(x) + W'(x).$$

Теорема 4. Похідна від добутку двох диференційованих функцій дорівнює добутку похідної першої функції на другу функцію плюс добуток

першої функції на похідну від другої функції, т.т. якщо $y = u \cdot V$, то $y' = u'V + uV'$.

Доведення.

$$y = u \cdot V;$$

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \cdot (V + \Delta V).$$

$$\Delta y = (u + \Delta u) \cdot (V + \Delta V) - u \cdot V = \Delta u \cdot V + u \cdot \Delta V + \Delta u \cdot \Delta V;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot V + u \cdot \frac{\Delta V}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta V}{\Delta x};$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot V + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u \cdot \frac{\Delta V}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \cdot \frac{\Delta V}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot V + u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x}$$

Розглянемо $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x}$. Оскільки $u(x)$ – диференційована функція, то

вона неперервна. Отже, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$. Крім того, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = V' \neq \infty$.

Таким чином, $y' = u'V + uV'$.

Теорема 5. Похідна дробу (т.т. частки від ділення двох функцій) дорівнює дробу, де знаменник є квадрат знаменника даного дробу, а чисельник є різниця між добутком знаменника на похідну чисельника і добутком чисельника на похідну знаменника, т.т., якщо $y = \frac{u}{V}$, то

$$y' = \frac{u'V - uV'}{V^2}.$$

Доведення.

Якщо Δy , Δu і ΔV є приростами функцій y , u і V , які відповідають прирощенню Δx аргументу x , то

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{V + \Delta V}, \quad \Delta y = \frac{u + \Delta u}{V + \Delta V} - \frac{u}{V} = \frac{V \cdot \Delta u - u \cdot \Delta V}{V(V + \Delta V)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{V \cdot \Delta u - u \cdot \Delta V}{V(V + \Delta V)}}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot V - u \cdot \frac{\Delta V}{\Delta x}}{V(V + \Delta V)},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot V - u \frac{\Delta V}{\Delta x}}{V(V + \Delta V)} = \frac{V \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x}}{V \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (V + \Delta V)}.$$

Замітивши, що $\Delta V \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, отримаємо $y' = \frac{u'V - uV'}{V^2}$.

4. Похідна складеної функції

Нехай дана складена функція $y = f(x)$, т.т. така, що її можна представити в вигляді $y = F(u)$, $u = \varphi(x)$.

Теорема. Якщо функція $u = \varphi(x)$ має в деякій точці x похідну $u'_x = \varphi'(x)$, а функція $y = F(u)$ має при відповіднім значенні u похідну $y'_u = F'(u)$, то складена функція $y = F[\varphi(x)]$ в указаній точці x також має похідну, яка дорівнює

$$y'_x = F'_u(u) \cdot \varphi'(x),$$

де замість u повинен бути підставлений вираз $u = \varphi(x)$. Скорочено $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ т.т. похідна складеної функції дорівнює добутку даної функції по проміжному аргументу u на похідну проміжного аргументу по x .

5. Похідна логарифмічної функції. Теорема.

Похідна від функції $\log_a V$ дорівнює $\frac{V'}{V} \log_a e$, тобто, якщо $y = \log_a V$, то

$$y' = \frac{V'}{V} \cdot \log_a e.$$

Доведення.

Якщо Δy є приріст $y = \log_a V$, що відповідає приросту ΔV аргументу V , то $y + \Delta y = \log_a (V + \Delta V)$. Звідки

$$\Delta y = \log_a (V + \Delta V) - \log_a V = \log_a \frac{V + \Delta V}{V} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta V} = \frac{1}{V} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right).$$

Помножимо і розділимо на V вираз, що стоїть в правій частині

$$\frac{\Delta y}{\Delta V} = \frac{1}{V} \cdot \frac{V}{\Delta V} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right) = \frac{1}{V} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right)^{\frac{V}{\Delta V}}. \text{ Позначимо } \frac{\Delta V}{V} = \alpha. \text{ Очевидно}$$

$$\alpha \rightarrow 0 \text{ при } \Delta V \rightarrow 0 \text{ і данім } V. \text{ Отже } \frac{\Delta y}{\Delta V} = \frac{1}{V} \cdot \log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

$$\text{Але, як відомо } \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Якщо ж вираз, що стоїть під знаком логарифму прямує до числа e , то логарифм цього виразу прямує до $\log_a e$. Тому матимемо :

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta x} = \lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} \cdot \frac{1}{V} \cdot \log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{V'}{V} \cdot \log_a e.$$

Замітивши, що $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$, виведену формулу можна переписати так

$$y' = \frac{V'}{V} \cdot \frac{1}{\ln a}.$$

В окремому випадку, якщо $y = \ln V$, то $y' = \frac{V'}{V}$.

6. Похідна степеневої функції

Теорема. Похідна функції $y = V^n$, де n – ціле додатне число, дорівнює $n \cdot V^{n-1} \cdot V'$, тобто, якщо $y = V^n$, то $y' = n \cdot V^{n-1} \cdot V'$.

Доведення.

Маємо функцію $y = V^n$.

1) Якщо V отримає прирощення ΔV , то $y + \Delta y = (V + \Delta V)^n$.

2) Тоді $\Delta y = (V + \Delta V)^n - V^n$

3) Знайдемо відношення
$$\frac{\Delta y}{\Delta V} = \frac{(V + \Delta V)^n - V^n}{\Delta V} = \frac{V^n \left[\left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right)^n - 1 \right]}{\Delta V}.$$

4) Знайдемо границю цього відношення використавши властивість еквівалентних нескінченно малих величин

$$\begin{aligned}
 y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta V} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{V^n \left[\left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right)^n - 1 \right]}{\Delta V} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{V^n \cdot n \cdot \frac{\Delta V}{V}}{\Delta V} \cdot V = n \cdot V^{n-1} \cdot V'.
 \end{aligned}$$

$$y' = n \cdot V^{n-1} \cdot V'$$

7. Похідна показникової функції

Теорема. Похідна від функції a^V , де $a > 0$ дорівнює $a^V \cdot \ln a \cdot V'$, тобто, якщо $y = a^V$, то $y' = a^V \cdot \ln a \cdot V'$.

Доведення.

Прологарифмуємо рівність $y = a^V$, отримаємо $\ln y = \ln a \cdot V$.

Знаходячи похідну від лівої і правої частин рівності матимемо

$$\frac{y'}{y} = \ln a \cdot V' \Rightarrow y' = y \cdot \ln a \cdot V', \text{ або } y' = a^V \cdot \ln a \cdot V'.$$

8. Похідна степенево-показникової функції

Теорема. Якщо $y = u^v$, то $y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \ln u \cdot v'$

Доведення.

Прологарифмуємо обидві частини рівності $y = u^v$, маємо

$$\ln y = \ln u^v \quad \ln y = v \cdot \ln u$$

Знаходячи похідну від лівої і правої частин рівності матимемо

$$\frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}; \quad y' = y \cdot \left(\ln u \cdot v' + \frac{v'}{u} \cdot u' \right),$$

або

$$y' = u^v \cdot \left(\ln u \cdot v' + \frac{v}{u} \cdot u' \right).$$

$$y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'.$$

9. Похідні від тригонометричних функцій

Теорема1. Похідною від $\sin V$ є $\cos V \cdot V'$, тобто якщо $y = \sin V$, то $y' = \cos V \cdot V'$.

Доведення.

Надамо V приріст ΔV , тоді :

$$1) \quad y + \Delta y = \sin(V + \Delta V)$$

$$2) \quad \Delta y = \sin(V + \Delta V) - \sin V = 2 \sin \frac{V + \Delta V - V}{2} \cdot \cos \frac{V + \Delta V + V}{2} = 2 \sin \frac{\Delta V}{2} \cdot \cos \left(V + \frac{\Delta V}{2} \right).$$

$$3) \quad \frac{\Delta y}{\Delta V} = \frac{2 \sin \frac{\Delta V}{2} \cdot \cos \left(V + \frac{\Delta V}{2} \right)}{\Delta V} = \frac{\sin \frac{\Delta V}{2}}{\frac{\Delta V}{2}} \cdot \cos \left(V + \frac{\Delta V}{2} \right).$$

при $\Delta V \rightarrow 0$ і $\Delta x \rightarrow 0$.

$$4) \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta x} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta V}{2}}{\frac{\Delta V}{2}} \cdot \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \cos \left(V + \frac{\Delta V}{2} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} =$$

$$= \left\{ \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta V}{2}}{\frac{\Delta V}{2}} = 1 \right\} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \cos \left(V + \frac{\Delta V}{2} \right)' = \cos V \cdot V'.$$

Таким чином :

$$y' = \cos V \cdot V' \quad (\sin V)' = \cos V \cdot V'$$

Теорема2. Похідною від $\cos V$ є $-\sin V \cdot V'$ тобто якщо $y = \cos V$, то $y' = -\sin V \cdot V'$.

Доведення.

Надамо аргументу V приріст ΔV , тоді

$$1) \quad y + \Delta y = \cos(V + \Delta V)$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= \cos(V + \Delta V) - \cos V = -2 \sin \frac{V + \Delta V - V}{2} \cdot \sin \frac{V + \Delta V + V}{2} = \\ 2) \quad &= -2 \sin \frac{\Delta V}{2} \cdot \sin \left(V + \frac{\Delta V}{2} \right) \end{aligned}$$

$$3) \quad \frac{\Delta y}{\Delta V} = -2 \frac{\sin \frac{\Delta V}{2}}{\Delta V} \cdot \sin \left(V + \frac{\Delta V}{2} \right) \text{ при } \Delta V \rightarrow 0 \text{ і } \Delta x \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} 4) \quad y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta x} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta V}{2}}{\frac{\Delta V}{2}} \cdot \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sin \left(V + \frac{\Delta V}{2} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \\ &= (-1) \cdot \sin V \cdot V' = -\sin V \cdot V' \end{aligned}$$

$$(\cos V)' = -\sin V \cdot V'.$$

Теорема 3. Похідна від функції $\operatorname{tg} V$ дорівнює $\frac{V'}{\cos^2 V}$, тобто якщо $y = \operatorname{tg} V$, то $y' = \frac{V'}{\cos^2 V}$.

Доведення.

$$y = \operatorname{tg} V = \frac{\sin V}{\cos V}.$$

Знайдемо похідну за правилом диференціювання частки

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sin V)' \cdot \cos V - \sin V \cdot (\cos V)'}{\cos^2 V} = \frac{\cos V' \cdot \cos V - \sin V \cdot (-\sin V) \cdot V'}{\cos^2 V} = \\ &= \frac{\cos^2 V + \sin^2 V}{\cos^2 V} \cdot V' = \frac{V'}{\cos^2 V} \end{aligned}$$

$$(\operatorname{tg} V)' = \frac{V'}{\cos^2 V}.$$

Теорема 4. Похідна від функції $\operatorname{ctg} V$ дорівнює $-\frac{V'}{\sin^2 V}$, тобто якщо $y = \operatorname{ctg} x$ то $y' = -\operatorname{ctg} V$.

Доведення. Оскільки $y = \operatorname{ctg} V = \frac{\cos V}{\sin V}$, то

$$y' = \left(\frac{\cos V}{\sin V} \right)' = \frac{(\cos V)' \sin V - \cos V \cdot (\sin V)'}{\sin^2 V} = \frac{-\sin V \cdot V'' \cdot \sin V - \cos V \cdot \cos V \cdot V'}{\sin^2 V} =$$

$$= \frac{\sin^2 V + \cos^2 V}{\sin^2 V} \cdot V' = -\frac{V'}{\sin^2 V}.$$

$$(\operatorname{ctg} V)' = -\frac{V'}{\sin^2 V}.$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

10. Логарифмічне диференціювання

Теорема. Похідна від функції V^n , де n – будь-яке дійсне число, дорівнює $n \cdot V^{n-1} \cdot V'$, тобто якщо $y = V^n$, то $y' = n \cdot V^{n-1} \cdot V'$.

Доведення.

Нехай $V > 0$. Застосуємо метод логарифмічного диференціювання сутність якого полягає в наступному. Прологарифмуємо обидві частини виразу $y = V^n$, і знайдемо похідну правої і лівої частини

$$\ln y = \ln V^n, \quad \ln y = n \cdot \ln V.$$

$$(\ln y)' = n \cdot (\ln V)' \quad \text{або} \quad \frac{y'}{y} = n \cdot \frac{V'}{V}$$

$$\text{Звідки} \quad y' = y \cdot n \cdot \frac{V'}{V}, \quad y' = n \cdot V^n \cdot \frac{V'}{V} = n \cdot V^{n-1} \cdot V'.$$

$$\text{Таким чином,} \quad y' = n \cdot V^{n-1} \cdot V'.$$

Лекція № 6

Тема: Застосування диференціального числення для дослідження функцій і побудови їх графіків.

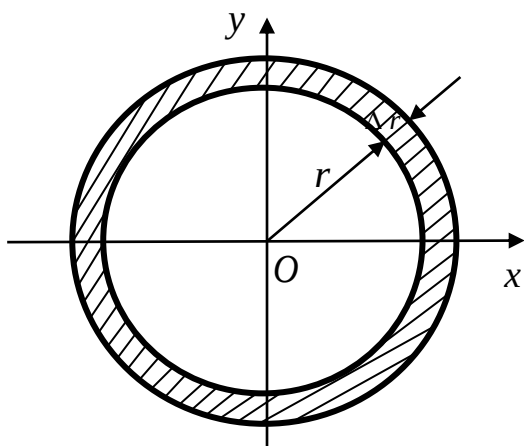
Питання лекції:

1. Диференціал функції.

2. Геометричний зміст диференціала.
3. Механічний зміст диференціала.
4. Правила і формули обчислення диференціала.
5. Диференціал складної функції. Інваріантність форми диференціала складної функції.
6. Застосування диференціала до наближених обчислень.
7. Необхідні і достатні умови зростання і спадання функції.
8. Максимум і мінімум функції. Теорема Ферма. Необхідна умова існування екстремуму функції.
9. Дослідження функції на екстремум за допомогою першої похідної. Перша достатня ознака існування екстремуму. Алгоритм розрахунку (робоче правило).
10. Дослідження функції на екстремум за допомогою другої похідної. Друга достатня ознака існування екстремуму. Алгоритм розрахунку.
11. Знаходження найбільшого і найменшого значення функції на замкненому інтервалі. Алгоритм розрахунку.

1. Диференціал функції

Ми з'ясували дуже важливе поняття математики – поняття похідної функції. З'ясували її аналітичний, механічний і геометричний змісти. Навчилися знаходити похідні елементарних функцій. Розглянемо ще одне дуже важливе поняття математики, тісно зв'язане з похідною – це поняття диференціала функції. З'ясуємо його геометричний і механічний зміст і значення для прикладних наук.



У різних питаннях техніки часто приходится обчислювати приріст функції $\delta = f(x)$, що характеризують розглянутий процес. Однак безпосереднє обчислення приросту функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ для конкретних функцій важке.

Нехай, наприклад, потрібно обчислити приріст площі дзеркала

поршня, радіуса r , при зміні температури від t° до t_1° .

Нехай приріст радіуса при зміні температури буде Δr . Первісна площа дзеркала поршня $S = \pi r^2$. Знайдемо приріст площі дзеркала поршня.

$$\begin{aligned}\Delta S &= \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = \pi r^2 - 2\pi r \cdot \Delta r + \pi \cdot (\Delta r)^2 - \pi r^2 = \\ &= 2\pi r \cdot \Delta r + \pi \cdot (\Delta r)^2\end{aligned}$$

Питання студентам:

Що таке $2\pi r$ стосовно πr^2 ?

Легко бачити, що $2\pi r = S'_r$, де

$$\Delta S = S'_r \cdot \Delta r + \pi \cdot (\Delta r)^2 \quad (1)$$

Ми бачимо, що приріст площі дорівнює двом складовим: одне лінійне відносно Δr (приріст незалежної перемінної), а друге – є нескінченно мала величина більш високого порядку, відносно Δr .

Таким чином, виникає питання, у якому випадку приріст довільної функції $y = f(x)$ можна представити як суму двох доданків, з яких один, лінійний відносно Δx , а другий є нескінченно малою величиною більш високого порядку, ніж Δx . Відповідь на нього дає наступна теорема.

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ диференційована на $[a; b]$, то приріст функції представляється формулою

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x) \cdot \Delta x, \quad (2)$$

де $\alpha(x, \Delta x)$ – нескінченно мала величина, що прагне до нуля, при $\Delta x \rightarrow 0$.

Означення. Диференціалом функції $y = f(x)$, що має похідну, називається головна, лінійна відносно Δx частина приросту функції, рівна $f'(x) \cdot dx$.

Диференціал функції позначають так

$$dy = f'(x) \Delta x \quad (3)$$

Легко показати, що $\Delta x = dx$. Дійсно, якщо $y = x$, те $dy = dx = x' \cdot \Delta x = \Delta x$, тоді диференціал (3) можна записати

$$dy = f'(x)dx. \quad (3')$$

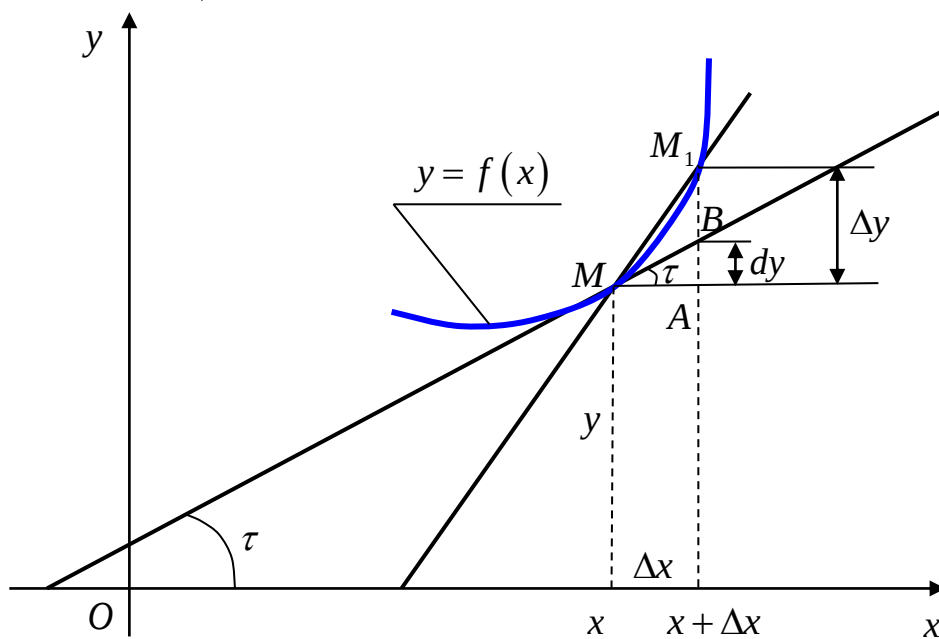
З (3') випливає, що $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, тобто похідну $\frac{dy}{dx}$ можна розглядати як частку диференціала функції dy і диференціала незалежної змінної dx .

Тепер формулу (2) остаточно можна записати

$$\Delta y = f'(x)dx + \alpha \cdot \Delta x \quad \text{або} \quad \Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x. \quad (2')$$

2. Геометричний зміст диференціала

Нехай $y = f(x)$ – диференційована функція, графік якої зображений на рисунку.



Візьмемо на кривій довільну точку $M(x, y)$ і близьку до неї сусідню точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Проведемо дотичну MB до кривої в точці M , і нехай вона утворює з віссю Ox кут τ , перетинаючи

ординату $y + \Delta y$ в точці B .

$$\text{З } \triangle MAB: \frac{AB}{MA} = \operatorname{tg} \tau;$$

$AB = MA \cdot \operatorname{tg} \tau = f'(x) \cdot \Delta x = dy$ ($\operatorname{tg} \tau = f'(x)$ – з геометричного змісту похідної), а $AM_1 = \Delta y$. Звідси геометричний зміст диференціала.

З геометричної точкою зору диференціал функції є приріст ординати дотичної до кривої, проведеної в точці M з абсцисою x . А Δy – є приріст ординати кривої $y = f(x)$ в точці x .

Який зміст BM_1 ?

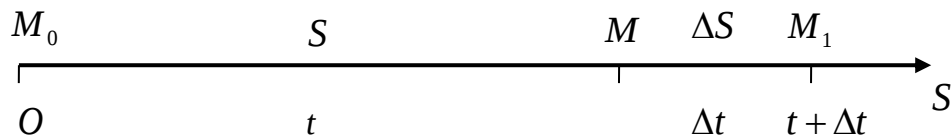
Розглянемо відрізок AM_1 . Він дорівнює $AM_1 = \Delta y = AB + BM_1 = dy + \hat{a} \cdot \hat{a}$.

Звідси, заміна Δy на dy на будь-якій малій ділянці зміни аргументу, еквівалентна тому, що на малій ділянці зміни аргументу, довільну диференційовану функцію можна замінити лінійною функцією (див. рисунок), частиною дотичної. Така заміна називається лінеаризацією функції.

Таким чином, **заміна істинного приросту функції на малому інтервалі зміни аргументу x диференціалом означає заміну нерівномірних процесів – рівномірними, неоднорідних об'єктів – однорідними, нелінійних функцій – лінійними.**

Цей факт дуже важливий для складання математичних моделей.

3. Механічний зміст диференціала



Нехай $S = f(t)$ – закон руху матеріальної точки M . За нескінченно малий приріст часу $\Delta t = dt$, точка пройшла шлях

$\Delta S = MM_1 = f'(t) \cdot \Delta t + \alpha \cdot \Delta t$, де α – нескінченно мала величина $f'(t) = V$.

Але оскільки α – нескінченно мала величина, то

$$\Delta S \approx dS = V \cdot \Delta t, \quad (4)$$

де V – швидкість точки в момент часу t , тобто в точці M . З (4) випливає, що диференціал шляху – це шлях, що пройде точка за час Δt , якби з моменту часу t точка почала рухатися рівномірно зі швидкістю $V = \frac{dS}{dt}$.

Таким чином, на малому проміжку часу приблизно можна вважати нерівномірний рух рівномірним.

4. Правила і формули обчислення диференціала

Виходячи, з визначення диференціала $dy = f'(x)dx$ випливає, що задача знаходження диференціала функції рівносильна знаходженню похідної, тому що помноживши похідну на диференціал незалежного змінного dx , одержимо диференціал функції. Тому всі правила і формули знаходження похідної справедливі і для знаходження диференціала.

Наприклад, якщо, $y = u + v$, то $dy = (u + v)'dx = u'dx + v'dx = du + dv$,

аналогічно $d(uv) = u dv + v du$, $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$ і т.д.

Наприклад, знайти диференціал функції $y = \sin^3 x$.

$$dy = f'(x)dx = 3\sin^2 x \cdot \cos x dx.$$

5. Диференціал складної функції. Інваріантність форми диференціала складної функції

Відомо, що якщо $y = f(x)$, то

$$dy = f'(x)dx = y'_x dx \quad (5)$$

Знайдемо вираз для диференціала складної функції $y = f(v)$, де $v = \varphi(x)$, тобто $y = f[\varphi(x)]$. По означенню диференціала $dy = y'_x dx$, але для складної функції $y'_x = y'_v \cdot v'_x$. Тоді

$$dy = y'_v \cdot (v'_x dx) = y'_v \cdot dv = f'(v)dv. \quad (6)$$

Оскільки $v'_x dx = dv$, тобто диференціал складної функції має такий же вид, таку ж форму, якби змінна v була незалежною змінною, тобто форма запису диференціала не залежить від того, є аргумент незалежною змінною або диференційованою функцією від неї. Ця властивість диференціала, зберігати свою форму, називається **інваріантністю форми запису диференціала складної функції**.

Сформульована властивість має велике значення для зворотної операції диференціювання – інтегрування. Дійсно, нехай $y = \sin v$, де $v = e^x$, тобто $y = \sin e^x$, $dy = \cos e^x \cdot e^x dx = \cos v dv$, де $v = e^x$, $dv = e^x dx$.

Якби було потрібно по похідній $y' = \cos e^x \cdot e^x$ визначити чому дорівнює сама функція y , то ми мали б великі труднощі. Але якщо відомо, що $y'_v = \cos v$, то саму функцію вже набагато легше відновити, це $y = \sin v$, а тепер ми гадуємо, що $v = e^x$, тобто $y = \sin e^x$.

6. Застосування диференціала до наближених обчислень

Практично застосування диференціала до наближених обчислень засновано на формулі (2')

$$\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x, \quad (2')$$

якщо Δx мало.

У загальному випадку залежність Δy від Δx буває дуже складною. Але з (2') видно, що якщо Δx мале, то нескінченно малими більш високого порядку відносно Δx , можна в (2') зневажити й одержимо наближену формулу

$$\Delta y \approx dy = f'(x)dx. \quad (7)$$

Обчислення dy набагато простіше, ніж Δy , тому що dy обчислюється в точці x .

З (7) отримується друга формула для наближеного знаходження приросту значення функції, дійсно, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy = f'(x)dx$,

Звідси

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)dx. \quad (8)$$

Приклад 1. Нехай $y = x^3$. Знайти Δy , якщо x змінюється від $x_1 = 10$ до $x_2 = x_1 + \Delta x = 10,01$.

Розв'язання.

$\Delta x = x_2 - x_1 = 0,01$, $y' = f'(x) = 3x^2$, тоді за формулою (7)
 $\Delta y \approx 3 \cdot x_1^2 \cdot \Delta x = 3 \cdot 10^2 \cdot 0,01 = 3$.

Точне значення $\Delta y = (x_1 + \Delta x)^3 - x_1^2 = 3x^2 \Delta x + 3x \cdot (\Delta x) + (\Delta x)^3 = 3,003$

$$\delta = \frac{|3,003 - 3|}{3,003} \cdot 100\% = 0,01\%.$$

Приклад 2. Обчислити $\sqrt[5]{33}$ з точністю до 0,001.

Розв'язання.

Розглянемо функцію $y = \sqrt[5]{x}$. Візьмемо $x = 32$ $x + \Delta x = 33$, звідси $\Delta x = 1$,
 тоді за формулою (8) одержимо

$$f(x + \Delta x) = \sqrt[5]{x + \Delta x} \approx \sqrt[5]{x} + \left(\sqrt[5]{x}\right)' dx = \sqrt[5]{x} + \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{x^4}} \cdot \Delta x$$

або

$$\sqrt[5]{33} \approx \sqrt[5]{32} + \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{32^4}} = 2 + \frac{1}{5 \cdot 16} = 2,0125.$$

Точне значення $\sqrt[5]{33} = 2,012346 \approx 2,0123$

$$\delta = \frac{0,0002 \cdot 100\%}{2,0123} = 0,01\%.$$

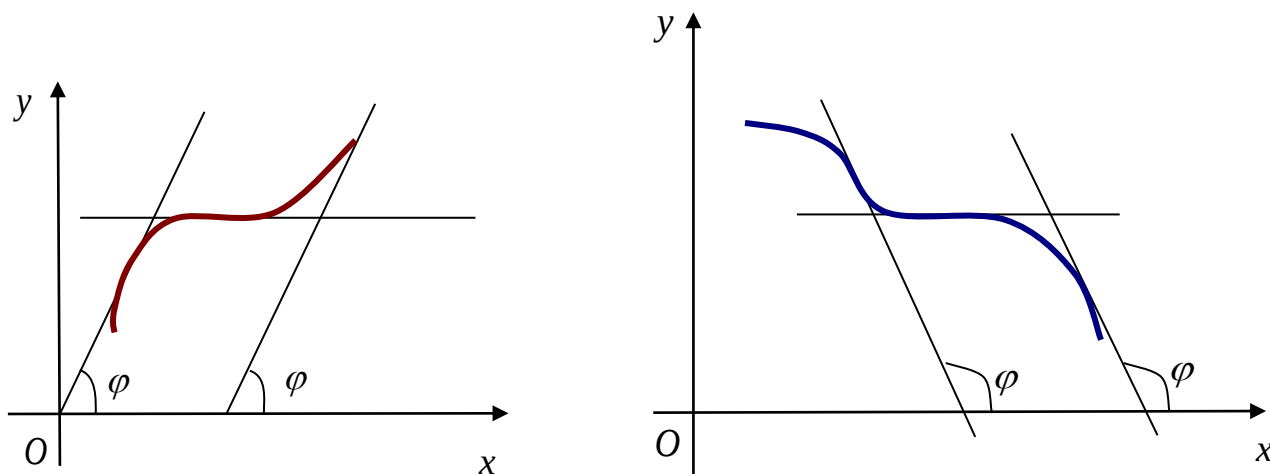
7. Необхідні і достатні умови зростання і спадання функції

Теорема. 1) Якщо функція $f(x)$, що має похідну на відрізку $[a; b]$, зростає на цьому відрізку, то її похідна на відрізку $[a; b]$ невід'ємна, тобто $f'(x) \geq 0$.

2) Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційована в проміжку $(a; b)$, при цьому $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то ця функція зростає на відрізку $[a; b]$.

Теорема. Якщо $f(x)$ спадає на відрізку $[a; b]$, то $f'(x) \leq 0$. Якщо $f'(x) < 0$ в проміжку $(a; b)$, то $f(x)$ спадає на відрізку $[a; b]$.

Зауваження. Розглянуті теореми виражають наступний геометричний



зміст.

Якщо на проміжку $[a; b]$ $f(x)$ зростає, то дотична до кривої $y = f(x)$ в кожній точці на цьому відрізку утворює з віссю Ox гострий кут φ або в окремих точках горизонтальна $f'(x) = \operatorname{tg} \varphi \geq 0$.

Якщо на проміжку $[a; b]$ $f(x)$ спадає, то кут нахилу дотичної з додатним напрямком осі Ox тупий (або в окремих точках дотична горизонтальна): $f'(x) = \operatorname{tg} \varphi \leq 0$.

8. Максимум і мінімум функції. Теорема Ферма. Необхідна умова існування екстремуму функції

1. Означення максимуму (max)

Функція $f(x)$ в точці x_1 має максимум, якщо значення функції $f(x)$ в точці x_1 більше ніж її значення в усіх точках деякого інтервалу, що містить точку x_1 .

Функція $f(x)$ має max при $x = x_1$, якщо $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ при любых Δx достатньо малих по абсолютній величині.

Означення мінімуму (min)

Функція $f(x)$ має min при $x = x_2$, якщо $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при любых Δx як додатних, так і від'ємних достатньо малих по абсолютній величині.

Слід зазначити наступне:

а) Функція може досягати $\max$ або $\min$ тільки в точках у середині відрізка.

б) $\max$ і $\min$ не можна змішувати з найбільшим і найменшим значеннями.

Максимуми і мінімуми функції називають екстремумами (*Extremum* – крайній)

Теорема Ферма (необхідна умова існування екстремуму)

Якщо диференційована функція $y = f(x)$ має в точці $x = x_1$ $\max$ або $\min$, то її похідна обертається в нуль в цій точці, тобто $f'(x_1) = 0$.

Необхідна умова існуванню екстремуму, ще не є достатньою, тобто якщо функція $f(x)$ має похідну, то вона може мати екстремум тільки при тих значеннях де $f'(x_1) = 0$.

Обернене невірно, тобто не при всякій значенні, при якій похідна обертається в нуль, обов'язково існує екстремум (приклад дивись по підручнику Піскунова Н.С.). Функція може мати екстремум лише в двох випадках, або в точках де похідна існує і дорівнює нулю, або в тих точках де похідна не існує.

Якщо похідна не існує в будь якій точці, вона зазнає розриву.

Значення аргументу, при яких похідна обертається в нуль, або зазнає розриву називається критичними точками, або критичними значеннями.

9. Дослідження функції на екстремум за допомогою першої похідної. Перша достатня ознака існування екстремуму. Алгоритм розрахунку (робоче правило)

Теорема (достатня умова існування екстремуму)

Нехай неперервна функція в деякій інтервалі містить точку x_1 і диференційована у всіх точках цього інтервалу.

Якщо при переході зліва направо через цю точку похідна змінює знак з плюса на мінус, то при $x = x_1$ функція має максимум.

Якщо при переході через точку x_1 зліва направо похідна змінює знак з мінуса на плюс, то функція має в цій точці мінімум.

Алгоритм розрахунку екстремуму функції за першою похідною

1. Відшукуємо першу похідну $f'(x)$.
2. Знаходимо критичні значення аргументу x , для цього:
 - а) прирівнюємо першу похідну до нуля і знаходимо дійсні корені рівняння $f'(x) = 0$;
 - б) Знаходимо значення x , при яких похідна $f'(x)$ зазнає розриву.
3. Досліджуємо знак похідної зліва і справа від критичної точки.
4. Обчислюємо значення функції $f(x)$ при кожнім критичнім значенні аргументу.

Приклад. Дослідити функцію $y = \frac{x^2}{x-1}$ на екстремум.

Розв'язання.

1. Знайдемо першу похідну

$$y' = \frac{2x(x-1) - x}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$2. \text{ а) } y' = 0 \quad x^2 - 2x = 0 \quad x(x-2) = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 2;$$

$$\text{б) } x_3 = 1.$$

- 3.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	0	—	не існує	—	0	+
y	↑	max	↓	не існує	↓	min	↑

$$4. y_{\max}(0) = 0; \quad y_{\min}(2) = 4.$$

10. Дослідження функції на екстремум за допомогою другої похідної.
Друга достатня ознака існування екстремуму. Алгоритм розрахунку

Нехай при x_1 похідна $f'(x)$ обертається в нуль тобто $f'(x_1) = 0$.

$f''(x)$ існує і неперервна в деякому околі точки x_1 .

Теорема. Нехай $f'(x_1) = 0$, тоді при $x = x_1$, функція має максимум, якщо $f''(x_1) < 0$ і мінімум, якщо $f''(x_1) > 0$.

Алгоритм розрахунку екстремуму функції за другою похідною

1. Знаходимо першу похідну $f'(x)$.
2. Знаходимо усі критичні точки за умовою:
а) $f'(x) = 0$;

б) $f'(x)$ – зазнає розриву.

3. Знаходимо другу похідну $f''(x)$.

4. В другу похідну послідовно підставляємо критичні значення аргументу.

Якщо при цьому друга похідна буде від'ємна, то при відповіднім значенні аргументу функція має максимум.

Якщо при підстановці критичного значення друга похідна додатна, то функція має мінімум.

5. Обчислюємо значення $f(x)$ при кожному конкретному значенні аргументу.

Зауваження.

Якщо при данім критичнім значенні аргументу $f''(x_1) = 0$, або ∞ , то дослідження функції ведеться по першому робочому правилу.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $y = x^4 \cdot e^{-x^2}$.

Розв'язання.

$$1. y' = 4x^3 \cdot e^{-x^2} + x^4 \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = 4x^3 \cdot e^{-x^2} - 2x^5 \cdot e^{-x^2} = 2e^{-x^2} \cdot x^3(2 - x^2);$$

$$2. а) y' = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = -\sqrt{2} \quad x_3 = \sqrt{2};$$

б) – похідна скрізь неперервна

$$3. y'' = 4 \cdot 3x^2 \cdot e^{-x^2} + 4x^3 \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) - 2 \cdot 5x^4 \cdot e^{-x^2} - 2x^5 \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) =$$

$$= 12x^2 \cdot e^{-x^2} - 10x^4 \cdot e^{-x^2} + 4x^6 \cdot e^{-x^2} = 12x^2 \cdot e^{-x^2} - 18x^4 \cdot e^{-x^2} + 4x^6 \cdot e^{-x^2} =$$

$$= 2x^2 \cdot e^{-x^2} (6 - 9x^2 + 2x^4) = 2x^2 \cdot e^{-x^2} (2x^4 - 9x^2 + 6);$$

$$4. \ y''(0) = 0 \quad \begin{matrix} y'(-1) = -2 \cdot e^{-1} < 0 \\ y'(1) = -2 \cdot e^{-1} > 0 \end{matrix} \Rightarrow \min y_{\min}(0) = 0$$

$$y''(-\sqrt{2}) = -16 \cdot e^{-2} < 0 \Rightarrow \max$$

$$y_{\max}(-\sqrt{2}) = 4 \cdot e^{-2}$$

$$y''(\sqrt{2}) = -16 \cdot e^{-2} < 0 \Rightarrow \max$$

$$y_{\max}(\sqrt{2}) = 4 \cdot e^{-2}$$

11. Знаходження найбільшого і найменшого значення функції на замкненому інтервалі. Алгоритм розрахунку

Найбільше (найменше) значення неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ досягається або в критичних точках функції, або на кінцях інтервалу.

Для визначення найбільшого (найменшого) значення функції треба:

- а) Обчислити значення функції у всіх критичних точках відрізка $[a; b]$;
- б) обчислити значення $f(a)$ і $f(b)$ функції на кінцях відрізка;
- в) визначити найбільше (найменше) з обчислених чисел.

Якщо функція задана і неперервна в деякому проміжку і якщо цей проміжок не є відрізком, то серед значень функції $f(x)$, може не бути ні найбільшого ні найменшого.

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ на відрізку $[-2; 2,5]$.

Розв'язання.

$$1) \ y' = (2x^3 - 3x^2 - 12x + 1)' = 6x^2 - 6x - 12 \quad y' = 0;$$

$$6(x^2 - x - 2) = 0; \quad x^2 - x - 2 = 0;$$

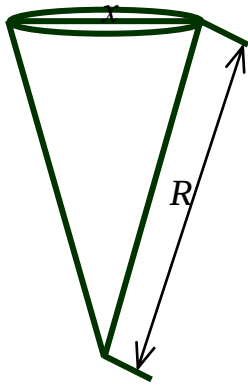
$$x_1 = -1 \in [-2; 2,5]; \quad x_2 = 2 \in [-2; 2,5].$$

$$2) \quad y(-1) = -2 - 3 + 12 + 1 = 8; \quad y(2) = 16 - 12 - 24 + 1 = -19;$$

3)

$$y(-2) = -16 - 12 + 24 + 1 = -3; \quad y(2,5) = 2 \cdot \frac{125}{8} - 3 \cdot \frac{25}{4} - 12 \cdot \frac{5}{2} + 1 = -16 \frac{1}{2}.$$

$$4) \quad y_{\text{найб.}}(-1) = 8; \quad y_{\text{найм.}}(2) = -19.$$

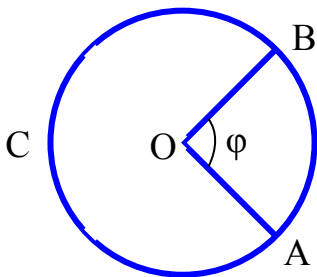


Задача. Конусоподібний фільтр виготовляють з кружка фільтрованого паперу шляхом звернення цього кружка. При цьому круговий сектор AOB складається так, щоб залишена частина AOB кружка утворювала бічну поверхню конічної лійки. Визначити, при яким радіусі основи лійки остання буде мати найбільший об'єм, якщо радіус кружка фільтрованого паперу дорівнює R

Розв'язання.

Нехай x – радіус основи конусоподібної лійки ($0 < x < R$)

При $x \rightarrow 0$ і $x \rightarrow R$, $V \rightarrow 0$



$$H = \sqrt{R^2 - x^2} \quad V = \frac{1}{3} \pi x^2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2};$$

$$\begin{aligned} V' &= \frac{1}{3} \pi \cdot 2x \cdot \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{1}{3} \pi \cdot x \cdot \frac{2 - kx}{4\sqrt{R^2 - x^2}} = \\ &= \frac{\pi}{3} \left[\frac{2x(R^2 - x^2) - x^3}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right] = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(-3x^2 - 2xR^2)}{\sqrt{R^2 - x^2}} \end{aligned}$$

$$V' = 0,$$

$$x(2R^2 - 3x^2) = 0, \quad x_1 = 0; \quad x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R; \quad x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R.$$

Точки x_1 і x_2 не належать досліджуваному інтервалу. Знайдемо V :

$$V'' = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(-9x^2 + 2R^2)\sqrt{R^2 - x^2} - (-3x^3 + 2xR^2) \cdot \frac{(-2x)}{2\sqrt{R^2 - x^2}}}{R^2 - x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{3} \frac{(R^2 - x^2) \cdot (-9x^2 + 2R^2) + (-3x^3 + 2xR^2)x}{(R^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{9x^4 + 2R^4 - 9x^2R^2 - 3x^4}{(R^2 - x^2)^{3/2}}$$

$$V''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{9 \cdot \frac{4}{9}R^4 + 2R^4 - 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot R^4 - 3 \cdot \frac{4}{9}R^4}{\left(R^2 - \frac{2}{3}R^2\right)^{3/2}} = \frac{6R^4 - 6R^4 - \frac{4}{3}R^4}{\left(\frac{R^2}{3}\right)^{3/2}} < 0$$

$$V_{\max}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right) = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot R^2 \cdot \sqrt{R^2 - \frac{2}{3}R^2} = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$$

Замітимо, що оскільки довжина дуги AB дорівнює $2\pi x$, то можна визначити співвідношення

$$x : R = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,8165$$

Отже, дуга ACB містить $360^\circ - 360^\circ \cdot 0,8165$ град., а дуга AB містить $360^\circ \cdot 0,1835 = 66,06^\circ$.

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ З МОДУЛЯ №1

«Елементи лінійної алгебри. Аналітична геометрія. Елементи векторної алгебри. Диференціальне числення»

Практичне заняття № 1

Тема: Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса і матричним способом.

1. Знаходження оберненої матриці.
2. Розв'язування систем лінійних рівнянь різними способами.

Мета:

1. Знати означення системи лінійних рівнянь.
2. Вміти розв'язувати системи лінійних рівнянь способами:
 - а) методом Гауса;
 - в) методом оберненої матриці.
3. Знати методи розв'язання СЛАР.

Час: 2 год.

Література: [1], стр. 185-196, [5], гл. 2, §1, 2, 3.

1.1. Теоретичні відомості.

1.1.1. Метод Гауса

Нехай маємо систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

[illegible]

Нехай матриця A – це матриця, яка складена з коефіцієнтів при невідомих.

Вона називається матрицею системи:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Якщо до матриці A приєднати стовпець вільних членів, то отримана матриця B називається розширеною матрицею системи:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Метод Гауса полягає в тому, щоб звести розширену матрицю системи до трикутного або трапецієвидного вигляду.

Означення. Квадратна матриця називається трикутною, якщо всі елементи, що стоять нижче (або вище) головної діагоналі дорівнюють нулю, наприклад,

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Розширену матрицю системи зводять до трикутного або трапецієвидного вигляду за допомогою елементарних перетворень матриці. З матрицею можна робити такі операції (як з рівняннями у системі):

- множити рядок на число;
- додавати та віднімати рядки;
- міняти місцями рядки, викреслювати нульовий рядок.

1.1.2. Матричний метод (метод оберненої матриці).

Нехай маємо систему n лінійних рівнянь з n невідомими :

[illegible]

Нехай матриця A – матриця коефіцієнтів при невідомих; X – матриця стовпець невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ та B – матриця-стовпець вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Ліву частину системи (2) можна записати у вигляді добутку матриць $A \cdot X$, а праву – у вигляді B . Таким чином маємо матричне рівняння:

$$A \cdot X = B \quad (4)$$

Якщо визначник матриці A відмінний від 0, то матриця A має обернену матрицю A^{-1} . Помножимо обидві частини рівняння (2) зліва на матрицю A^{-1} , одержимо:

$$A^{-1} \cdot A = E, \text{ де } E \text{ – одинична матриця, а } E \cdot X = X, \text{ то}$$

$$X = A^{-1} \cdot B \quad (5)$$

Відшукування розв'язків за формулою (5) називають матричною формою розв'язання системи лінійних рівнянь. Щоб використати формулу (5), необхідно спочатку знайти обернену матрицю A^{-1} .

Обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (6)$$

де A_{ij} алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} визначника Δ .

1.2. Практична частина.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 4; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2; \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = -12 \end{cases}$$

Розв'язання.

Складемо розширену матрицю системи:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 5 & -8 & 2 & -12 \end{array} \right).$$

За допомогою елементарних перетворень зведемо матрицю $\bar{A}$ до трикутного виду.

$$\begin{aligned} \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 5 & -8 & 2 & -12 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & -8 & 2 & -12 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \times(-3) \\ + \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -8 & -22 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -8 & -22 \end{array} \right) \xrightarrow{:2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -11 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 11 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-7)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 25 & 75 \end{array} \right) \xrightarrow{:25} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Останній матриці відповідає трикутна система, яка еквівалентна до даної системи:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_2 - 4x_3 = 11 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, отримуємо:

$$x_3 = 3; x_2 = 1; x_1 = -2.$$

Відповідь: $(-2; 1; 3)$.

Приклад 2. Розв'язати систему матричним методом.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1; \\ -x_1 + x_2 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо систему у матричному вигляді

$$A \cdot X = B,$$

де
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Рішення шукаємо за формулою $X = A^{-1} \cdot B$.

Знайдемо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 3 + 2 + 2 = 11 \neq 0.$$

Знайдемо обернену матрицю, для цього знайдемо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(12 - 4) = -8;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 - 0) = 1; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1;$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} \overrightarrow{1} & -5 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ -5 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \downarrow = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-5) + 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) \\ (-5) \cdot 1 + (-8) \cdot 2 + 6 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -11 \\ 11 \\ -33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 1) = 1;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2 + 3) = -5; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6;$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ -5 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

Оскільки $X = A^{-1} \cdot B$, то

Відповідь: $(-1; 1; -3)$.

Самостійна робота.

Розв'язати системи рівнянь: а) за допомогою формул Крамера;

б) методом Гаусса; в) матричним методом.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 36 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 13 \\ x_2 + x_3 - x_1 = 7 \end{cases}$$

Відповідь: $\left(24\frac{1}{2}; 21\frac{1}{2}; 10\right)$.

Домашнє завдання.

Розв'язати системи рівнянь: а) методом Гаусса; в) матричним методом.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

Відповідь: $(1; 1; 1)$.

Питання для самоперевірки.

1. Записати формули Крамера.
2. Перелічити елементарні перетворення матриць.
3. Суть методу Гаусса.
4. Як записати систему лінійних рівнянь за допомогою матриць.
5. Як скласти обернену матрицю.

Практичне заняття №2.

Тема: *Застосування диференціального числення для дослідження функцій і побудови їх графіків.*

1. Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції.
2. Розв'язування текстових задач.

Мета: 1. Вивчити основні визначення.

2. Знати правила застосування диференціювання.

3. Вміти застосовувати похідну для дослідження функцій і побудови їх графіків.

Час. 2 год.

Література: [4], гл. 4, [5], гл. 8.

2.1. Теоретичні відомості.

Означення 1. Точка x_0 називається точкою максимуму функції $y = f(x)$, якщо $f(x_0) > f(x)$ для всіх $x \neq x_0$ з деякого околу точки x_0 .

Означення 2. Точка x_1 називається точкою мінімуму функції $y = f(x)$, якщо $f(x_1) < f(x)$ для всіх $x \neq x_1$ з деякого околу точки x_1 .

Означення 3. Значення функції в точці максимуму $f(x_0)$ називається максимумом функції, а значення функції в точці мінімуму $f(x_1)$ – мінімумом функції. Спільна назва максимумів і мінімумів функції – екстремуми (рис. 4).

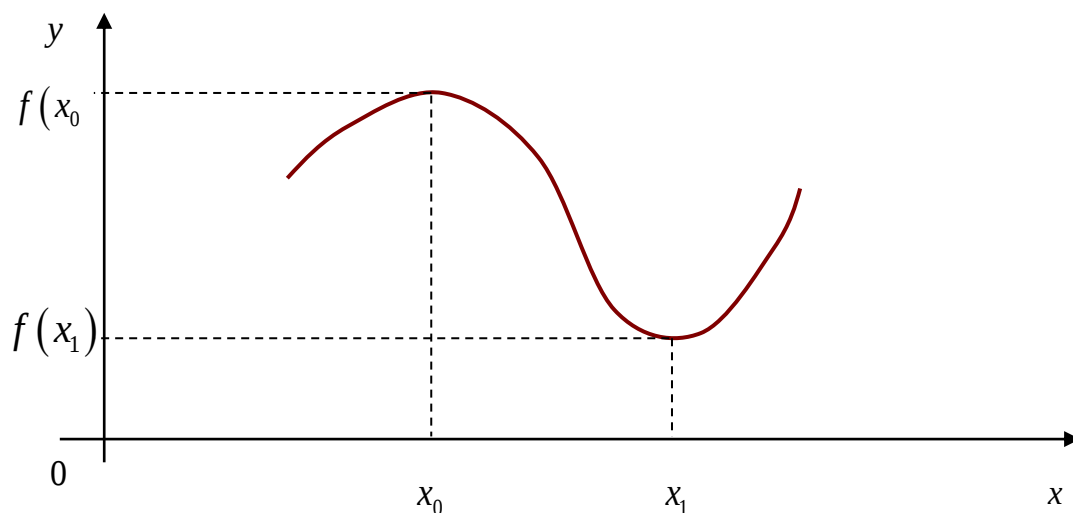


Рис. 4

Необхідна умова екстремуму

Якщо функція $y = f(x)$ має екстремум в точці $x = x_0$, то $f'(x_0) = 0$ або $f'(x_0)$ не існує.

Точки, в яких похідна функції $y = f(x)$ дорівнює нулю або не існує називаються критичними точками.

Для того, щоб визначити чи існує екстремум у критичній точці, треба застосувати достатні умови екстремуму.

Достатні умови екстремуму

Перша достатня умова екстремуму

Нехай x_0 – критична точка функції $y = f(x)$. Якщо при переході через критичну точку зліва направо похідна функції $f'(x)$ змінює знак з мінуса на плюс, то x_0 – точка мінімуму.

Якщо при переході через критичну точку зліва направо похідна функції змінює знак з плюса на мінус, то x_0 – точка максимуму.

Правило дослідження функції на екстремум

Для того, щоб дослідити функцію на екстремум треба:

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти похідну і критичні точки функції.
3. Знайти знак похідної зліва та справа від кожної критичної точки.

4. Визначити характер кожної критичної точки, обчислити екстремуми функції.

Друга достатня ознака екстремуму

Нехай функція $y = f(x)$ двічі диференційована в деякому околі точки x_0 .

Тоді: якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка мінімуму;

якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 точка максимуму;

Правило дослідження функції на екстремум

Для того, щоб дослідити функцію на екстремум потрібно:

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти похідну функції і критичні точки функції, розв'язуючи рівняння $f'(x) = 0$.
3. Знайти другу похідну і обчислити її значення в критичних точках.
4. Визначити характер кожної критичної точки, обчислити екстремуми функції.

Слід мати на увазі, що найбільше і найменше значення на відрізку $[a; b]$ неперервна функція може досягати або в точках екстремуму, що належать відрізку, або на кінцях цього відрізка.

Але якщо функція має єдиний максимум (мінімум) на відрізку $[a; b]$, то вона досягає найбільшого (найменшого) значення саме в точці максимуму (мінімуму).

Розв'язання задачі на знаходження найбільшого або найменшого значення передбачає:

1. Складання функції, найбільше або найменше значення якої потрібно знайти;
2. Знаходження області визначення цієї функції згідно з її фізичним або геометричним змістом.
3. Дослідження на екстремум цієї функції.

Для того, щоб **дослідити функцію та побудувати її графік**, треба:

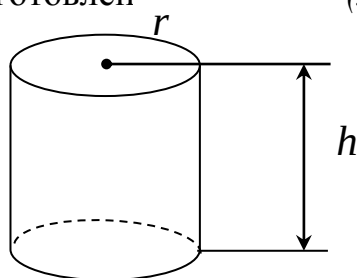
1. Знайти область існування функції.
2. Дослідити функцію на неперервність, знайти характер точок розриву.
3. Дослідити функцію на парність.
4. Якщо функція періодична, то знайти її період.

5. Знайти першу похідну функції, інтервали зростання та спадання, екстремуми функції.
6. Знайти другу похідну функції, інтервали опуклості та угнутості, точки перегину.
7. Знайти асимптоти графіка функції.
8. Якщо це можливо, знайти точки перетину графіка функції з осями координат, інтервали знакосталості функції.
9. Побудувати графік.

2.2. Практична частина

Приклад 1. Потрібно виготовити закритий зверху циліндричний бак максимального об'єму. Якими повинні бути радіус основи і висоти циліндра, якщо на його виготовлен $S = 6\pi$ (m^2) матеріалу?

Розв'язання.



Нехай x – радіус основи,

h – висота циліндра

Тоді $V = \pi x^2 h$.

Рис.1

Повна поверхня $S = 2\pi x^2 + 2\pi xh$, звідси $h = \frac{S - 2\pi x^2}{2\pi x}$

Об'єм виразимо як функцію від x :

$$V = \pi x^2 \frac{S - 2\pi x^2}{2\pi x} = \frac{1}{2}(Sx - 2\pi x^3), \quad x > 0.$$

Дослідимо цю функцію на максимум.

$$V'(x) = \frac{1}{2}(S - 6\pi x^2); \quad V'(x) = 0,$$

знаходимо критичну точку $S - 6\pi x^2 = 0$; $x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. Якщо $S = 6\pi$, то $x_{кр} = 1$.

Знайдемо другу похідну $V''(x) = \frac{1}{2}(-12\pi x) = -6\pi x$; $V''(1) = -6\pi < 0$, що означає, що при $x=1$ функція $V(x)$ має максимум.

При цьому $h = \frac{6\pi - 2\pi}{2\pi} = 2$.

Отже, $V = V_{\max}$, якщо радіус основи 1 м, а висота 2 м.

Приклад 2. Дослідити та побудувати графік для функції $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

Розв'язання.

1. Область існування $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$
2. $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \infty$; $x=1$ – це точка розриву другого роду, а пряма $x=1$ – вертикальна асимптота.
3. Вісь Ox графік функції не перетинає, оскільки $x^2 + 3 \neq 0$.
Графік функції перетинає вісь Oy у точці $y = -3$.

На проміжку $(-\infty; 1)$ $y < 0$, при $x \in (1; \infty)$ $y > 0$

4. Оскільки $f(-x) = \frac{x^2 + 3}{-x - 1} \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, то функція ані парна, ані непарна.
5. Функція неперіодична.
6. Визначимо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x-1} = 1$$

$y = x + 1$ – похила асимптота

7. Знайдемо екстремуми та проміжки зростання та спадання функції:

$$y' = \left(\frac{x^2 + 3}{x-1} \right)' = \frac{2x(x-1) - x^2 - 3}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

При $y' = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

У інтервалі $(-\infty; 1)$ $y' > 0$ функція зростає,

у інтервалі $(-1; 1)$ $y' < 0$ функція спадає,

у інтервалі $(1; 3)$ $y' < 0$ функція спадає,

у інтервалі $(3; \infty)$ $y' > 0$ функція зростає.

Оскільки при переході через критичну точку $x_1 = -1$ похідна змінює знак з плюса на мінус, то точка $x_1 = -1$ – точка $\max$:

$$y_{\max}(-1) = -2$$

Оскільки при переході через критичну точку $x_2 = 3$ похідна змінює знак з мінуса на плюс, то точка $x_2 = 3$ – точка $\min$:

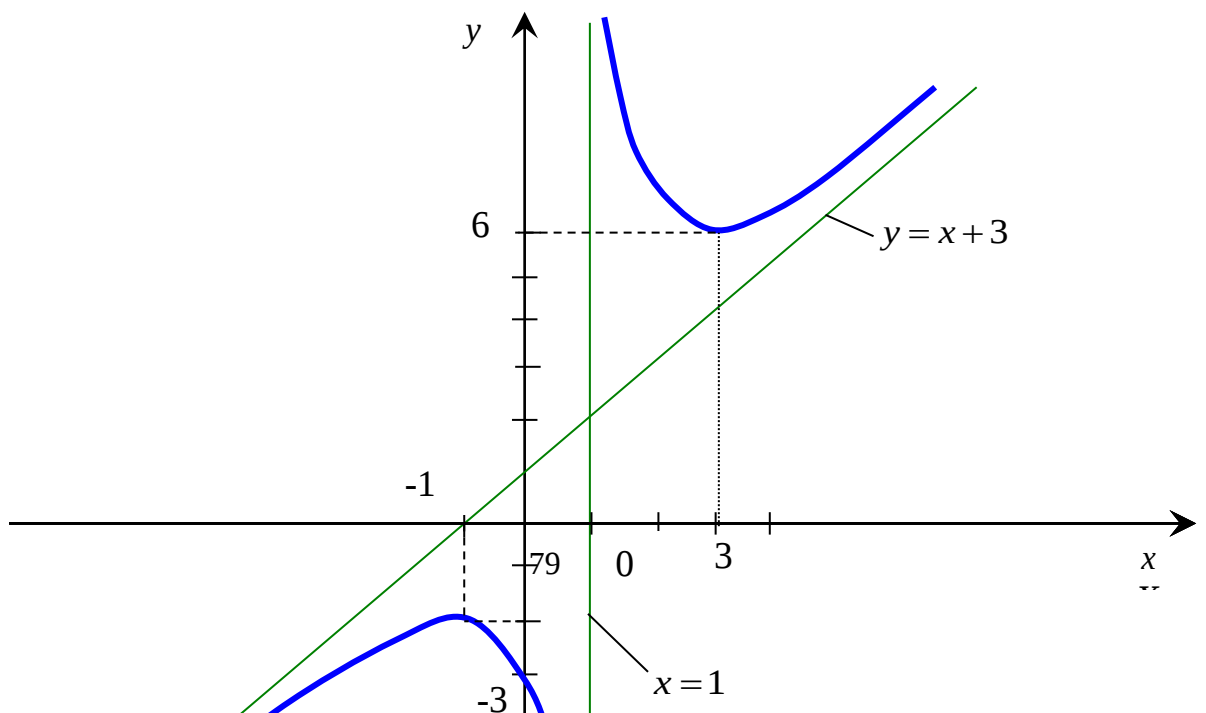
$$y_{\min}(3) = 6.$$

8. Знайдемо інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину.

$$y'' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-3)}{(x-1)^4} = \frac{8}{(x-1)^3}$$

Оскільки y'' не може бути рівною нулю, точок перегину немає, в інтервалі $(-\infty; 1)$ $y'' < 0$ і крива опукла, в інтервалі $(1; \infty)$ $y'' > 0$, крива вгнута.

9. Будуємо графік (рис.2).



Самостійна робота.

Побудувати графіки функцій за допомогою першої або другої похідної:

1. $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$

1. $y = x^2(x - 2)^2$

2. $y = e^x + e^{-x}$

Домашня робота.

Побудувати графіки функцій за допомогою першої або другої похідної:

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$$

$$y = \sqrt[3]{x^2} - x$$

Питання для самоперевірки:

1. Означення зростаючої та спадної функцій. Необхідні і достатні ознаки зростання (спадання) функції (сформулювати).
2. Означення екстремуму функції однієї змінної. Теорема Ферма. Необхідна ознака існування екстремуму. Критичні точки функції.
3. Дослідження функцій на екстремум за допомогою першої похідної. Перша достатня ознака існування екстремуму. Робоче правило.
4. Дослідження функцій на екстремум за допомогою другої похідної. Друга достатня ознака існування екстремуму. Робоче правило.
5. Найбільше і найменше значення функції на відрізку.
6. Означення опуклості та вгнутості кривої. Достатня умова опуклості (вгнутості) графіка функції. Точки перегину. Достатня умова існування точок перегину (сформулювати).

7. Поняття про асимптоти графіка функції. Знаходження вертикальних, похилих, горизонтальних асимптот.
8. Загальна схема дослідження функції та побудови графіка.

ЛЕКЦІЇ З МОДУЛЯ №2

«Інтегральне числення. Диференціальні рівняння першого та другого порядків»

Лекція № 7

Тема: *Невизначений інтеграл та його властивості. Основні методи інтегрування.*

Питання лекції:

1. Первісна і невизначений інтеграл.
2. Властивості невизначеного інтегралу.
3. Таблиця інтегралів. Безпосереднє інтегрування. Метод компенсуючого множника і метод розкладання.
4. Інтегрування методом заміни змінної або способом підстановки. Метод підведення під знак диференціалу.
5. Метод інтегрування частинами.
6. Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен в знаменнику.

1. Первісна і невизначений інтеграл

Раніше ми розглядали таку задачу: дана функція $F(x)$, потрібно знайти її похідну, тобто знайти таку функцію $f(x)$, що $f(x) = F'(x)$.

Розглянемо обернену задачу: нехай дана функція $f(x)$, потрібно знайти функцію $F(x)$, похідна від якої буде дорівнювати $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

Означення 1. Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$, якщо у всіх точках цього відрізка виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Приклад. Знайти первісну функції $f(x) = \tilde{o}^5$. За означенням слідує, що функція $F(x) = \frac{x^6}{6}$ буде первісною для функції $f(x) = \tilde{o}^5$, оскільки $\left(\frac{x^6}{6}\right)' = \frac{6x^5}{6} = x^5$.

Неважко бачити, що якщо для даної функції існує первісна, то вона не єдина. В нашій прикладі первісною для функції $f(x) = \tilde{o}^5$ буде функція $F_1(x) = \frac{x^6}{6} + 3$ і функція $F_2(x) = \frac{x^6}{6} + 5$, або в загальному вигляді $F(x) = \frac{x^6}{6} + \tilde{N}$, де $\tilde{N}$ – довільна стала.

Ми бачимо, що первісні відрізняються одна від одної лише на сталу величину, і їх нескінченна кількість. Таким чином функціями $\frac{x^6}{6} + \tilde{N}$ вичерпуються всі первісні від функції $\tilde{o}^5$. Отже справедлива теорема.

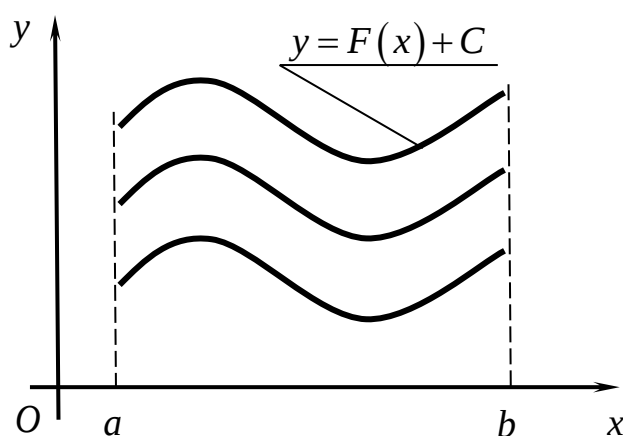
Теорема 1. Якщо $F_1(x)$ і $F_2(x)$ – дві первісні від функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$, то різниця між ними дорівнює сталому числу.

З теореми прямує, що якщо для даної функції $f(x)$ знайдена яка-небудь одна первісна $F(x)$, то будь-яка інша первісна для $f(x)$ має вигляд $F(x) + C$, де $C = \text{const}$.

Означення 1. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то вираз $F(x) + C$ називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ і позначається символом $\int f(x)dx$.

Таким чином за означенням $\int f(x)dx = F(x) + C$, якщо $F'(x) = f(x)$. При цьому $f(x)$ – підінтегральна функція; $f(x)dx$ – підінтегральний вираз; $\int$ – знак інтегралу.

Невизначений інтеграл являє собою сімейство функцій $y = F(x) + C$.



Накреслимо рисунок

З геометричної точки зору невизначений інтеграл являє сукупність кривих кожна з яких отримується зсувом однієї з кривих паралельно вздовж осі Oy .

Поставимо питання: чи для всякої функції існує первісна?

Виявляється, що не для всякої.

Але якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то для цієї функції існує первісна, а значить і невизначений інтеграл.

2. Властивості невизначеного інтегралу

1. Похідна від невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральній функції, тобто якщо $F'(x) = f(x)$, то і

$$\left(\int f(x)dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x).$$

2. Диференціал від невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральному виразу

$$d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx.$$

3. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції плюс довільна стала

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Сталій множник можна виносити за знак інтегралу, тобто якщо $k = \text{const}$, то

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx.$$

5. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченного числа функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів доданків, тобто

$$\int [f_1(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int f_1(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx.$$

Таблиця основних інтегралів

$$1. \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, u > 0, n \neq -1;$$

$$13. \int \text{cth } u du = \ln |\text{sh } u| + C;$$

$$2. \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C, u > 0;$$

$$14. \int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \text{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right| + C;$$

$$3. \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C, u \neq 0;$$

$$15. \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \text{tg} \frac{u}{2} \right| + C;$$

$$4. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1;$$

$$16. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \text{tg } u + C;$$

$$5. \int e^u du = e^u + C;$$

$$17. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\text{ctg } u + C;$$

$$6. \int \sin u du = -\cos u + C;$$

$$18. \int \frac{du}{\text{ch}^2 u} = \text{th } u + C;$$

$$7. \int \cos u du = \sin u + C;$$

$$19. \int \frac{du}{\text{sh}^2 u} = -\text{cth } u + C;$$

$$8. \int \text{tg } u du = -\ln |\cos u| + C; \quad 20. \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{arctg} \frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} \text{arcctg} \frac{u}{a} + C;$$

$$9. \int \text{ctg } u du = -\ln |\sin u| + C;$$

$$21. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C;$$

$$10. \int \text{sh } u du = \text{ch } u + C;$$

$$22. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C = -\arccos \frac{u}{a} + C, |u| < |a|;$$

$$11. \int \text{ch } u du = \text{sh } u + C;$$

$$23. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C;$$

$$12. \int \operatorname{th} u du = \ln |\operatorname{ch} u| + C;$$

$$24. \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C.$$

Безпосереднє інтегрування

Знаходження інтегралів від функцій застосоване на прямім використанні властивостей невизначених інтегралів і формул інтегрування називається способом безпосереднього інтегрування

Приклад. Знайти інтеграл $\int (2x^3 - 3x^2 + 2x - 7) dx$.

Розв'язання.

$$\int (2x^3 - 3x^2 + 2x - 7) dx = 2 \int x^3 dx - 3 \int x^2 dx + 2 \int x dx - 7 \int dx = 2 \frac{x^4}{4} - 3 \frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^2}{2} - 7x + C$$

Метод компенсуючого множника і метод розкладання

Треба обчислити інтеграл $\int f(ax) dx$.

$$\text{Він дорівнює } \int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C.$$

$$\text{Доведемо це} \quad \left(\int f(ax) dx \right)' = f(ax)$$

$$\left[\frac{1}{a} F(ax) + C \right]' = \frac{1}{a} \cdot [F(ax)]' + C' = \frac{1}{a} \cdot f(ax) \cdot a = f(ax).$$

Отже, похідні від лівої і правої частин рівні, а це доводить справедливості даної рівності.

Розглянемо декілька прикладів.

$$1) \int \cos 5x dx = \frac{1}{5} \sin 5x + C;$$

$$2) \int \sin(3x - 2) dx = -\frac{1}{3} \cos(3x - 2) + C.$$

Метод розкладання полягає в розкладі підінтегральної функції, в лінійну комбінацію більш простих функцій, і застосуванні властивості лінійності інтеграла

$$\int \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) dx = \sum_{i=1}^n a_i \int f_i(x) dx.$$

Приклади.

$$1) \int \frac{x^2 + 6x - 1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx + 6 \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + 6 \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - 2\sqrt{x} + C = \\ = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + 4x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C;$$

$$2) \int (x^2 + 5)^3 dx = \int (x^6 + 15x^4 + 75x^2 + 125) dx = \int x^6 dx + 15 \int x^4 dx + 75 \int x^2 dx + \\ + 125 \int dx = \frac{x^7}{7} + 15 \frac{x^5}{5} + 75 \frac{x^3}{3} + 125x + C = \frac{x^7}{7} + 3x^5 + 25x^3 + 125x + C.$$

4. Інтегрування методом заміни змінної або способом підстановки. Метод підведення під знак диференціалу

Дуже часто нам доводиться знаходити інтеграли для яких безпосередньо підібрати первісну для функції $f(x)$ ми не можемо, але відомо, що вона існує. Одним із методів, що дозволяє це зробити є метод заміни змінної (метод підстановки).

Розглянемо інтеграл $\int f(x) dx$.

Зробимо заміну змінної в підінтегральному виразі, поклавши $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервна функція з неперервною похідною, що має обернену функцію. Тоді $dx = \varphi'(t) dt$.

Покажемо, що в цьому випадку має місце наступна рівність:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt \quad (1)$$

Для доведення рівності (1) візьмемо похідну від її лівої і правої частин

$$\left(\int f(x) dx \right)'_x = f(x) \text{ – за властивістю невизначеного інтегралу.}$$

Праву частину продиференціюємо по x як складну функцію і де t проміжний аргумент. Оскільки $x = \varphi(t)$, то $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$, і за правилом диференціювання оберненої функції маємо:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}$$

Таким чином, маємо:

$$\left(\int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt \right)'_x = \left(\int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt \right)'_t \cdot \frac{dt}{dx} = f[\varphi(t)] \cdot \cancel{\varphi'(t)} \cdot \frac{1}{\cancel{\varphi'(t)}} = f[\varphi(t)] = f(x)$$

Звідси видно, що похідні від правої і лівої частин рівності (1) рівні, а значить і рівність (1) справедлива.

Приклади.

$$1) \int x\sqrt{x-5}dx = \left\{ \begin{array}{l} x-5=t^2 \\ dx=2tdt \\ x=t^2+5 \end{array} \right\} = \int (t^2+5)t \cdot 2tdt = 2\int t^4 dt + 10\int t^2 dt = 2\frac{t^5}{5} + 10\frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(x-5)^5} + \frac{10}{3}\sqrt{(x-5)^3} + C;$$

$$2) \int \frac{\sin 2x dx}{1+\sin^2 x} = \left\{ \begin{array}{l} t=1+\sin^2 x \\ dt=2\sin x \cos x dx = \sin 2x dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|1+\sin^2 x| + C$$

Метод підведення під знак диференціалу

Треба обчислити інтеграл $\int f(x)dx$. Припустимо, що існують диференційовані функції $u=\varphi(x)$ і $g(u)$ такі, що підінтегральний вираз $f(x)dx$ може бути записаний у вигляді

$$f(x)dx = g[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)dx = g(u)du$$

(вказане перетворення називається підведенням функції $u=\varphi(x)$ під знак диференціала). Замітимо, що при цьому виконується співвідношення

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int g(u)du \Big|_{u=\varphi(x)}.$$

Приклади.

$$1) \int \frac{x^3 dx}{x^8 + 1} = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2 + 1} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + C;$$

$$2) \int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln |\sin x| + C.$$

5. Метод інтегрування частинами

Нехай u і V дві диференційовані функції від x , тобто $u = u(x)$ і $V = V(x)$. Знайдемо диференціал добутку цих функцій

$$d(uV) = Vdu + u dV \quad (2)$$

Інтегруючи рівність (2) почленно, матимемо:

$$\int d(uV) = \int Vdu + \int u dV$$

$$uV = \int Vdu + \int u dV$$

$$\int u dV = uV - \int Vdu \quad (3)$$

Формула (3) називається формулою інтегрування частинами.

Метод інтегрування частинами полягає в тому, що підінтегральний вираз $f(x)dx$ розкладають на два множники u і dV . При цьому dV завжди містить dx і інтегрування виразу $\int f(x)dx$ замінюється двома інтегруваннями: при знаходженні V з диференціала dV і знаходженні інтегралу $\int Vdu$. Взагалі за u доцільно брати той вираз, від якого дістають простий диференціал, а за dV – той, від якого дістають простий інтеграл.

Рекомендації що до вибору u та dV

I. Якщо під знаком інтегралу стоїть добуток логарифмічної, або оберненої тригонометричної функції, на алгебраїчну, то за u звичайно приймають не алгебраїчну функцію:

$$\int P(x) \cdot \begin{cases} \ln ax \\ \arcsin bx \\ \arccos bx \\ \operatorname{arctg} bx \\ \operatorname{arcctg} bx \end{cases} dx \quad u = \begin{cases} \ln ax \\ \arcsin bx \\ \arccos bx \\ \operatorname{arctg} bx \\ \operatorname{arcctg} bx \end{cases} \quad dV = P(x) dx.$$

II) Якщо під знаком інтегралу стоїть добуток показникової або тригонометричної функції на алгебраїчну, то за u звичайно приймають алгебраїчну функцію:

$$\int P(x) \cdot \begin{cases} e^{ax} \\ \sin bx \\ \cos bx \\ \operatorname{tg} bx \\ \operatorname{ctg} bx \end{cases} dx \quad u = P(x) \quad dV = \begin{cases} e^{ax} \\ \sin bx \\ \cos bx \\ \operatorname{tg} bx \\ \operatorname{ctg} bx \end{cases} dx.$$

Приклади.

$$1) \int x e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ dV = -e^{-x} dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = dx \\ V = -e^{-x} \end{array} \Bigg\} = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C;$$

$$2) \int x^3 \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = x^3 dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = dx/x \\ V = x^4/4 \end{array} \Bigg\} = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \cdot \left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + C$$

6. Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен в знаменнику

$$1) \text{ Розглянемо інтеграл } I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

Перетворимо знаменник

$$ax^2 + bx + c = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2 \right],$$

де $\pm k^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2}$. Знак “+” або “-” береться в залежності від того, який знак буде мати вираз справа.

Таким чином

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2}.$$

Зробимо заміну змінної $x + \frac{b}{2a} = t$. Звідси $dx = dt$. Тоді матимемо $I_1 = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}$, а це є табличні інтеграли.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + C = \operatorname{arctg}(2x - 1) + C. \end{aligned}$$

2) Розглянемо інтеграл більш загального виду $I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$.

Проведемо тотожні перетворення підінтегральної функції. (Для обчислення I_2 в чисельнику виділимо похідну знаменника).

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) - \frac{Ab}{2a} + B}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \\ &\left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \cdot \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{A}{2a} \ln(ax^2 + bx + c) + \left(B - \frac{AB}{2a}\right) \cdot I_1. \end{aligned}$$

Лекція № 8

Тема: Визначений інтеграл.

Питання лекції:

1. Обчислення визначеного інтегралу. Теорема та формула Ньютона-Лейбніца.
2. Методи обчислення визначених інтегралів.
3. Заміна змінної в визначеній інтегралі і інтегрування частинами.

4. Обчислення площ плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла в прямокутній системі координат.
5. Обчислення об'ємів тіл за площами паралельних перерізів.
6. Обчислення об'ємів тіл обертання відносно осей Ox і Oy .

1. Обчислення визначеного інтегралу. Теорема та формула Ньютона-Лейбніца

Теорема. Якщо $F(x)$ є яка не будь первісна, від неперервної функції $f(x)$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Ця формула називається формула Ньютона-Лейбніца.

Якщо ввести позначення $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$, то формулу Ньютона-Лейбніца можна записати так

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Приклади. Користуючись формулою Ньютона-Лейбніца, обчислити інтеграли:

$$1. \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1.$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} = - \ln |\cos x| \Big|_0^{\pi/3} = - \ln \frac{1}{2} + \ln 1 = \ln 2.$$

$$3. \int_{\sqrt[3]{a}}^x x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{\sqrt[3]{a}}^x = \frac{x^3}{3} - \frac{a}{3} = \frac{x^3 - a}{3}.$$

2. Методи обчислення визначених інтегралів. Заміна змінної в визначенім інтегралі і інтегрування частинами

Теорема. Нехай дано інтеграл $\int_a^b f(x) dx$, де функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$. Вводимо нову змінну t за формулою $x = \varphi(t)$.

Якщо:

- 1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;
- 2) $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$;
- 3) $f[\varphi(t)]$ визначена і неперервна на відрізку $[\alpha; \beta]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt. \quad (1)$$

Зауваження. При обчисленні визначеного інтегралу за формулою (1) ми не повертаємося до старої змінної.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x dx = \left\{ \begin{array}{ll} t = \cos x & x_1 = 0 \\ dt = -\sin x dx & x_2 = \pi/2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 0 \end{array} = -\int_1^0 t^2 dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int_1^4 \frac{x dx}{\sqrt{2+4x}}$.

Розв'язання.

$$\int_1^4 \frac{x dx}{\sqrt{2+4x}} = \left\{ \begin{array}{ll} 2+4x = t^2 & \\ x = \frac{t^2-2}{4} & x_1 = 1; \quad \left| \begin{array}{l} t_1 = \sqrt{6} \\ t_2 = 3\sqrt{2} \end{array} \right. \\ dx = \frac{1}{2} t dt & x_2 = 4; \end{array} \right\} = \int_{\sqrt{6}}^{3\sqrt{2}} \frac{(t^2-2) t dt}{4 \cdot 2 \cdot t} = \frac{1}{8} \int_{\sqrt{6}}^{3\sqrt{2}} (t^2-2) dt =$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{t^3}{3} - 2t \right) \Big|_{\sqrt{6}}^{3\sqrt{2}} = \frac{1}{8} (18\sqrt{2} - 6\sqrt{2}) - \frac{1}{8} (2\sqrt{6} - 2\sqrt{6}) = \frac{1}{8} \cdot 12\sqrt{2} = \frac{3}{2} \sqrt{2}$$

Інтегрування частинами у визначенім інтегралі

Нехай u і V диференційовані функції від x .

Тоді $(uV)' = u'V + uV'$. Оскільки $\int (uV)' dx = uV + C$, то

$$\int_a^b (uV)' dx = (uV)\Big|_a^b, \text{ тому можна записати: } uV\Big|_a^b = \int_a^b Vdu + \int_a^b u dV$$

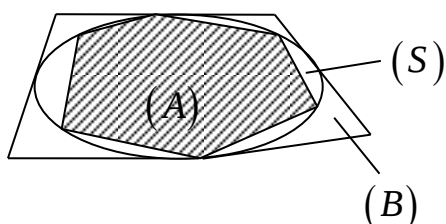
або остаточно $\int_a^b u dV = (uV)\Big|_a^b - \int_a^b Vdu$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int_0^1 x \cdot e^x dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^1 x \cdot e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ dV = e^x dx \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} du = dx \\ V = e^x \end{array} \right\} = x \cdot e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = e - e + 1 = 1.$$

4. Обчислення площ плоских фігур за допомогою певного інтеграла в прямокутній системі координат



Многокутною областю або многокутником, будемо називати довільну кінцеву плоску фігуру, обмежену однією або декількома замкнутими ломаними. Розглянемо всілякі многокутники (A), що цілком містяться в (S) і многокутники (B), що цілком в собі містять

(S). Якщо A і B є відповідно їх площі, то завжди $A \leq B$.

Множина чисел $\{A\}$, обмежена зверхулюбим B має точну верхню межу S_* , причому $S_* \leq B$. Точно так множина чисел $\{B\}$, обмежена знизу числом S^* має точну нижню грань, причому $S^* \geq S_*$. Ці межі можна було б називати першу – внутрішньої, а другу – зовнішньою площею фігури (S).

Якщо обидві межі

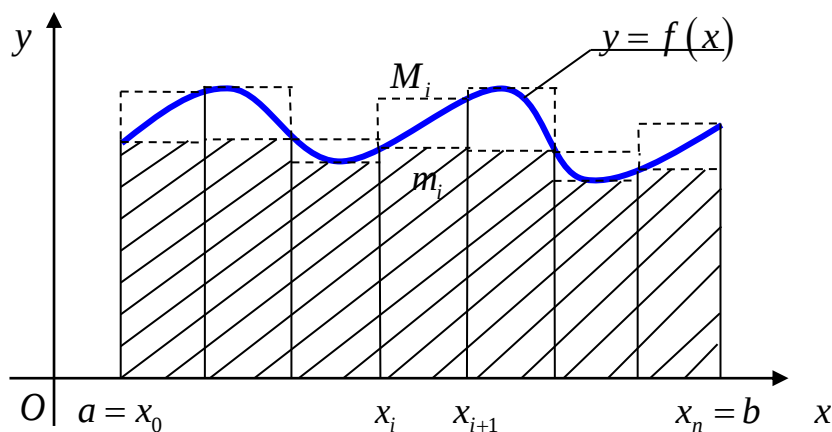
$$S_* = \sup \{A\} \text{ і } S^* = \inf \{B\}$$

співпадають, то їх спільне значення S називають площею фігури. В цьому випадку фігуру називають квад्रीруємою.

Для існування площі необхідно і достатньо, щоб для $\forall \varepsilon > 0$ знайшлися два многокутники (A) і (B) такі, що $B - A < \varepsilon$.

Звернемося тепер до обчислення площ плоских фігур за допомогою інтегралів і визначимо площу криволінійної трапеції. Розіб'ємо проміжок $[a; b]$ на частини $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$.

Позначимо відповідно m_i і M_i найменше і найбільше значення функції на i -му проміжку $[x_i; x_{i+1}]$. Тоді
$$p = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i, \quad P = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i.$$

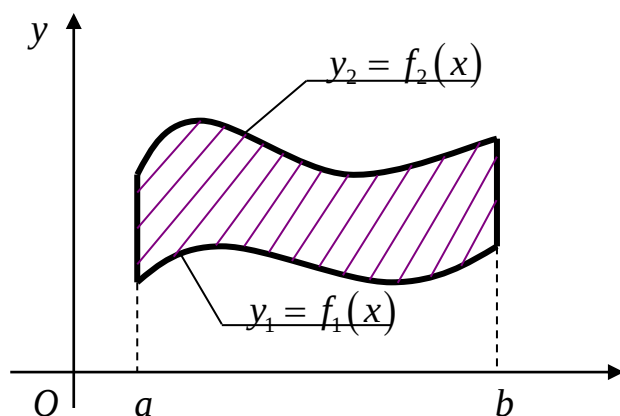


Вони, очевидно, представляють собою площі ступеневих фігур, складених відповідно з вхідних і вихідних прямокутників. Тому $p < S < P$.

Але при прямуванні до нуля найбільшої з різниць

Δx_i обидві суми мають своєю границею інтеграл $\int_a^b f(x) dx$.

Отже, йому і рівна шукана площа
$$S = \int_a^b y \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$



Якщо криволінійна трапеція обмежена і знизу і зверху кривими, рівняння яких $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$, то, розглядаючи її як різницю фігур, отримаємо площу названої трапеції у вигляді

$$S = \int_a^b (y_2 - y_1) dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

5. Обчислення об'ємів тіл за площами паралельних перерізів

Будемо розглядати многогранники (X) об'єму X , які цілком містяться в нашому тілі і многогранники (Y) об'єму Y , що містять в собі це тіло.

Завжди існує точна верхня межа V_* для X і точна нижня межа V^* для Y , причому $V_* \leq V^*$. Ці межі можна було б назвати відповідно внутрішнім і зовнішнім об'ємами тіла.

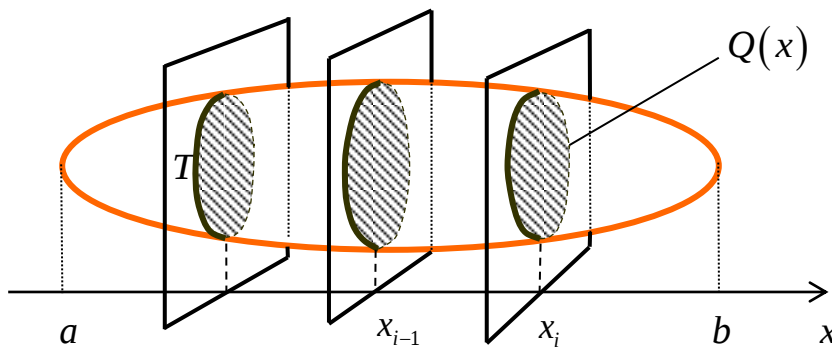
Якщо обидві межі

$$V_* = \sup\{X\} \quad \text{і} \quad V^* = \inf\{Y\}$$

співпадають, то їх спільне значення V називається об'ємом тіла. В цьому випадку тіло (V) називають кубіруємим.

Для існування об'єму необхідно і достатньо щоб $\forall \varepsilon > 0$ знайшлися такі два многогранники (X) і (Y) , для яких різниця $Y - X < \varepsilon$.

Нехай маємо деяке тіло (T) . Припустимо, що відома площа любого перерізу цього тіла площиною перпендикулярної до осі Ox .



Ця площа буде залежати від положення січної площини, тобто буде функцією від x :

$$Q = Q(x).$$

Припустимо,

що $Q(x)$ є неперервна функція від x , і визначимо об'єм даного тіла. Проведемо площини $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2$, ..., $x = x_i$, ..., $x = x_n = b$. Ці площини розіб'ють тіло на шари. В кожному частиннім проміжку $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ виберемо довільну точку ξ_i і для кожного значення $i = 1, 2, \dots, n$ побудуємо циліндричне тіло, твірна якого паралельна осі Ox , а направляюча зображує собою контур перерізу тіла (T) площиною $x = \xi_i$.

Об'єм такого елементарного циліндра з площею підстави $Q(\xi_i)$ ($x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$) і висотою Δx_i дорівнює $Q(\xi_i) \cdot \Delta x_i$.

$$\text{Об'єм всіх циліндрів буде рівний: } V_n = \sum_{i=1}^n Q(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Границя цієї суми при $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ (якщо віна існує) називається об'ємом даного тіла.

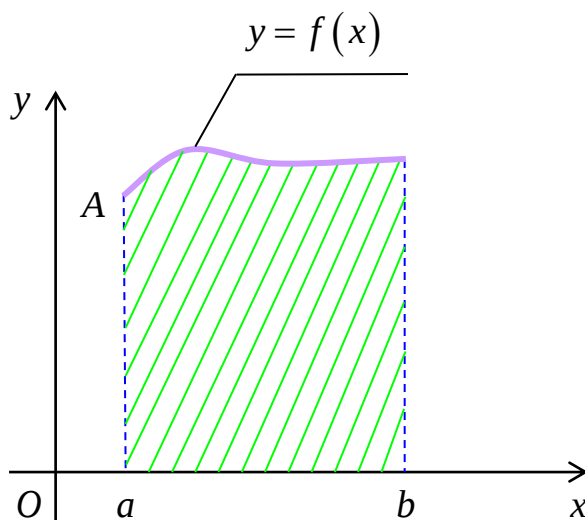
$$V = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Оскільки V_n являє собою, очевидно, інтегральну суму для неперервної функції $Q(x)$ на відрізку $[a; b]$, то вказана границя існує, і виражається визначенням інтегралом.

$$V = \int_a^b Q(x) dx.$$

6. Обчислення об'ємів тіл обертання відносно осей Ox і Oy

Розглянемо тіло, утворене обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції $aABb$, обмеженої кривою $y = f(x)$, відрізком $[a; b]$ осі Ox , і прямими $x = a$ і $x = b$.

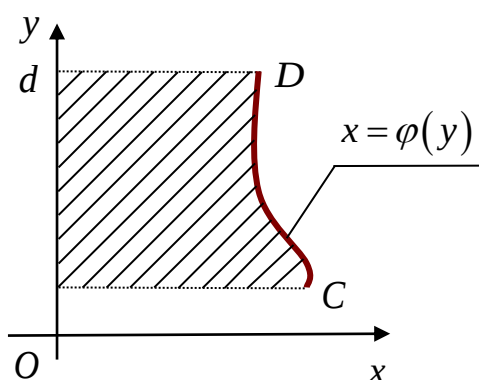


В цьому випадку довільний переріз тіла площиною, перпендикулярною до осі абсцис, є круг, площа якого

$$Q = \pi \cdot y^2 = \pi \cdot [f(x)]^2.$$

Застосовуючи загальну формулу для обчислення об'єму, отримаємо формулу для обчислення об'єму тіла обертання відносно осі Ox :

$$V_{Ox} = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



Аналогічно, об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої кривою $x = \varphi(y)$, відрізком

$[c; d]$ осі Oy і прямими $y = c$ і $y = d$ обчислюється за формулою:

$$V_{Oy} = \pi \cdot \int_c^d x^2 dy = \pi \cdot \int_c^d [\varphi(y)]^2 dy.$$

Лекція № 9

Тема: *Диференціальні рівняння. Диференціальні рівняння з відокремленими і відокремлюваними змінними*

Питання лекції:

1. Диференціальні рівняння. Основні поняття.
2. Диференціальні рівняння першого порядку. Задача і теорема Коші.
3. Загальний і частинний розв'язки диференціального рівняння першого порядку.
4. Диференціальні рівняння з відокремленими і відокремлюваними змінними.

1. Диференціальні рівняння. Основні поняття

При дослідженні фізичних явищ або технічних процесів дослідник намагається знайти залежність між досліджуваними величинами. Але цю залежність часто знайти неможливо і в той же час можна знайти залежність між їх нескінченно малими змінами, тобто між їх похідними або диференціалами, і тоді одержуються рівняння, що містять шукану функцію під знаком похідної або диференціалу.

Означення. Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x , шукану функцію $y = f(x)$ і її похідні $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{або} \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

Якщо шукана функція $y = f(x)$ є функцією однієї незалежної змінної, то диференціальне рівняння називаються звичайними.

Означення. Порядком диференціального рівняння називаються порядок найвищої похідної, що входить у рівняння.

Означення. Розв'язком або інтегралом диференціального рівняння називається всяка функція $y = f(x)$, котра будучи підставлена в рівняння, перетворює його в тотожність.

Процес відшукування розв'язку диференціального рівняння називається інтегруванням диференціального рівняння.

2. Диференціальні рівняння першого порядку. Задача і теорема Коші

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд:

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

Якщо це рівняння можна вирішити відносно y' , то його запис буде таким

$$y' = f(x, y). \quad (1')$$

Основною задачею для диференціального рівняння першого порядку є задача Коші. Це задача знаходження розв'язку диференціального рівняння (1'), задовольняючого початковій умові $y|_{x=x_0} = y_0$. Існування і єдиність задачі Коші виражається теоремою Коші.

Теорема Коші. Якщо права частина диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ неперервна разом із своєю частинною похідною $f'_y(x, y)$ в деякій області D площини xOy , то якою б не була точка M_0 з координатами (x_0, y_0) з області D існує і при тому єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$, який при $x = x_0$ дорівнює y_0 .

$$y = \varphi(x), \quad y_0 = \varphi(x_0).$$

Геометричний зміст теореми міститься в тім, що існує і при тому єдина функція $y = \varphi(x)$, графік якої проходить через точку (x_0, y_0) .

Умова, що при $x = x_0$ функція y повинна дорівнювати заданому числу y_0 називається початковою умовою. Вона часто записується у вигляді:

$$y|_{x=x_0} = y_0.$$

3. Загальний і частинний розв'язки диференціального рівняння першого порядку

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається функція

$$y = \varphi(x, C), \quad (2)$$

яка залежить від однієї довільної сталої C і задовольняє наступним умовам :

а) вона задовольняє диференціальному рівнянню прилюбим конкретним значенні сталої C ;

б) якою б не була початкова умова $y = y_0$ при $x = x_0$, тобто $y|_{x=x_0} = y_0$, можна знайти таке значення $C = C_0$, що функція $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє даній початковій умові.

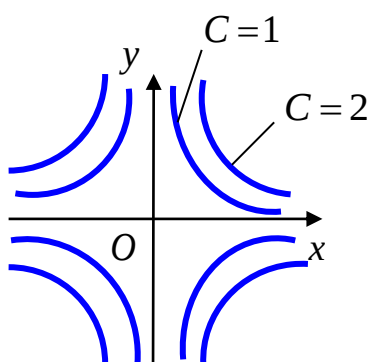
В процесі пошуку загального розв'язку диференціального рівняння ми приходимо до співвідношення виду

$$\hat{O}(x, y, C) = 0, \quad (2')$$

не вирішеному відносно y .

Рівність виду $\hat{O}(x, y, C) = 0$, що неявно задає загальний розв'язок, називається **загальним інтегралом диференціального рівняння**.

Означення. Частинним розв'язком називається люба функція $y = \varphi(x, C_0)$, яка отримується із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$, якщо в останнім довільній сталій C надати певне значення $C = C_0$. Співвідношення $\hat{O}(x, y, C_0) = 0$ називається в цьому випадку **частинним інтегралом диференціального рівняння**.



З геометричної точки зору загальний інтеграл являє собою сімейство кривих на координатній площині, що залежить від однієї довільної сталої C

Ці криві називаються інтегральними кривими даного диференціального рівняння.

Частинному інтегралу відповідає одна крива цього сімейства, яка проходить через деяку задану точку площини.

4. Диференціальні рівняння з відокремленими і відокремлюваними змінними

Розглянемо диференціальне рівняння виду:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y), \quad (3)$$

де права частина є добуток функції, що залежить тільки від x на функцію, що залежить тільки від y . Перетворимо його наступним чином (припустимо, що $f_2(y) \neq 0$):

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx. \quad (3')$$

Вважаючи y відомою функцією від x , рівність (3') можна розглядати як рівність двох диференціалів, а невизначені інтеграли від них будуть відрізнятися сталим доданком. Інтегруючи ліву частину по y , а праву по x , знайдемо

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C. \quad (3'')$$

Отримали загальний інтеграл рівняння (3).

Диференціальне рівняння типу (3')

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad (4)$$

називається рівнянням з **відокремленими змінними**.

Загальний інтеграл його є

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

Рівняння виду:

$$M_1(x) \cdot N_1(y)dx + M_2(x) \cdot N_2(y)dy = 0 \quad (5)$$

називається рівнянням з **відокремлюваними змінними**.

Воно може бути приведене до рівняння з відокремленими змінними шляхом ділення обох його частин на вираз $N_1(y) \cdot M_2(x) \neq 0$

$$\frac{M_1(x) \cdot N_1(y)}{N_1(y) \cdot M_2(x)} dx + \frac{M_2(x) \cdot N_2(y)}{N_1(y) \cdot M_2(x)} dy = 0,$$

або

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0.$$

Приклад. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$x \cdot (1 + y^2) dx + y \cdot (1 + x^2) dy = 0.$$

Розв'язання.

$$x \cdot (1 + y^2) dx + y \cdot (1 + x^2) dy = 0 / ((1 + y^2) \cdot (1 + x^2) \neq 0);$$

$$\frac{x \cdot (1 + y^2)}{(1 + y^2) \cdot (1 + x^2)} dx + \frac{y \cdot (1 + x^2)}{(1 + y^2) \cdot (1 + x^2)} dy = 0;$$

$$\frac{x dx}{1 + x^2} + \frac{y dy}{1 + y^2} = 0;$$

$$\int \frac{x dx}{1 + x^2} + \int \frac{y dy}{1 + y^2} = \frac{1}{2} \ln C;$$

$$\frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + \frac{1}{2} \ln |1 + y^2| = \frac{1}{2} \ln C$$

$$\ln(1 + y^2) \cdot (1 + x^2) = \ln c,$$

або після потенціювання

$$(1 + y^2) \cdot (1 + x^2) = C.$$

Приклад. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$ydx + xdy = 0.$$

Розв'язання.

Відокремимо змінні $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$.

Інтегруючи, отримаємо $\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dy}{y} = \ln C \Rightarrow \ln|x| + \ln|y| = \ln C$.

Пропотенціювавши останній вираз, отримаємо $x \cdot y = C$.

Задача. Швидкість розпаду радію в кожний момент часу пропорційна його наявній кількості, що мається на даний час. Знайти закон розпаду радію, якщо початкова кількість радію складає θ_0 і відомо, що через 1600 років (період напіврозпаду) залишиться лише половина цієї кількості.

Розв'язання. За умовою задачі $\frac{dm}{dt} = -km$.

Це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dm}{m} = -k \cdot dt; \quad \ln m = -kt + \ln C; \quad m = C \cdot e^{-kt}.$$

Оскільки при $t = 0$ маса радію θ_0 , то $\theta_0 = C \cdot e^{-k \cdot 0} = C$.

Тоді $m = \theta_0 \cdot e^{-kt}$.

Коефіцієнт k визначаємо з наступних міркувань:

при $t = 1600$, $m = \frac{\theta_0}{2}$; $\frac{\theta_0}{2} = \theta_0 \cdot e^{-1600 \cdot k} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-1600k}$;

$$\ln \frac{1}{2} = -1600 \cdot k \cdot \ln e; \quad k = \frac{\ln 2}{1600}.$$

Тоді

$m = \theta_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2 \cdot t}{1600}}$ – це і є закон розпаду радію.

Тема: Диференціальні рівняння. Однорідні диференціальні рівняння. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Диференціальне рівняння Я.Бернуллі.

Питання лекції:

1. Поняття однорідної функції, однорідного рівняння.
2. Однорідні диференціальні рівняння.
3. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Метод І.Бернуллі їх розв'язання.
4. Диференціальне рівняння Я.Бернуллі і методи його розв'язання.

1. Поняття однорідної функції, однорідного рівняння.

Введемо поняття однорідної функції

Означення. Функція двох незалежних змінних $f(x, y)$ називається однорідною вимірювання n , якщо для любого $t \neq 0$ виконується тотожність

$$f(tx, ty) = t^n \cdot f(x, y) \quad (1)$$

Приклад. Встановити однорідність даних функцій:

$$1) f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy};$$

$$2) f(x, y) = x^2 - y^2.$$

Розв'язання.

$$1) f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}; \quad f(tx, ty) = \frac{t^2x^2 + t^2y^2}{tx \cdot ty} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = t^0 \cdot f(x, y)$$

Це однорідна функція нульового вимірювання.

$$2) f(x, y) = x^2 - y^2; \quad f(tx, ty) = (tx)^2 - (ty)^2 = t^2 \cdot (x^2 - y^2) = t^2 \cdot f(x, y).$$

Це теж однорідна функція, але другого вимірювання.

Якщо функція однорідна і нульового вимірювання, то для неї виконується тотожність при будь-якому t

$$f(tx, ty) = f(x, y) \quad (2)$$

Якщо функція однорідна і нульового вимірювання, то вона залежить від співвідношення змінних

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2')$$

2. Однорідні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (3)$$

називається однорідним, якщо функції M і N однорідні одного і того ж вимірювання.

Однорідні диференціальні рівняння за допомогою заміни змінної $y = z \cdot x$ ($x = z \cdot y$) зводяться до диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними

$$N(x, y)dy = -M(x, y)dx;$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

це є

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (3')$$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (3'')$$

Зробимо заміну змінної

$$y = z \cdot x \quad (x = z \cdot y) \quad (4)$$

Тоді

$$y' = z + x \frac{dz}{dx} \quad (5)$$

Підставляючи (4) і (5) в (3"), отримаємо

$$\begin{aligned}
 z + x \frac{dz}{dx} &= \varphi(z); \quad x \frac{dz}{dx} = \varphi(z) - z; \\
 x dz &= [\varphi(z) - z] dx; \quad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{\varphi(z) - z}; \quad \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{\varphi(z) - z}; \quad \ln|x| = \psi(z) + \ln C; \\
 \ln \frac{x}{C} &= \psi(z); \quad x = C \cdot e^{\psi(z)}; \\
 x &= C \cdot e^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}. \tag{6}
 \end{aligned}$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0.$$

Розв'язання. Зробимо підстановку $y = z \cdot x$, $y' = z + xz'$

$$(x^2 - z^2 x^2) + 2x \cdot z \cdot x \cdot (z + xz') = 0;$$

$$x^2(1 - z^2) = -x^2 \cdot 2z(z + xz');$$

$$z^2 - 1 = 2z^2 + 2xz \cdot z';$$

$$-1 - z^2 = 2xz \cdot z'; \quad -1 - z^2 = 2xz \cdot \frac{dz}{dx}; \quad \frac{2zdz}{1 + z^2} + \frac{dx}{x} = 0;$$

$$\ln|1 + z^2| + \ln|x| = \ln C$$

$$(1 + z^2) \cdot x = C, \quad \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) \cdot x = C, \quad x^2 + y^2 = cx.$$

5. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Метод І.Бернуллі їх розв'язання

Означення. Лінійним рівнянням першого порядку називається рівняння, лінійне відносно невідомої функції і її похідної. Воно має вигляд

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{7}$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – задані функції від x .

Можна дати ще одне означення лінійного диференціального рівняння.

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо воно містить невідому функцію і її похідні в першій степені і не містить їх добутку.

Розглянемо **метод Іоанна Бернуллі** розв'язання лінійного диференціального рівняння першого порядку. Цей метод полягає в тому, що розв'язок відшукується у вигляді добутку двох функцій

$$y = u(x) \cdot v(x). \quad (8)$$

Знайдемо спочатку y'

$$y' = \frac{du}{dx}v + u \frac{dv}{dx} \quad (9)$$

Підставивши (8) і (9) в (7), отримаємо

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x)$$

Винесемо v за дужки

$$u \frac{dv}{dx} + v \left[\frac{du}{dx} + P(x) \cdot u \right] = Q(x) \quad (10)$$

Оскільки розв'язок відшукується у вигляді добутку двох функцій, то одну з функцій можна вибрати довільно.

Наприклад, функцію u виберемо так, щоб вона була розв'язком диференціального рівняння, ліва частина якого стоїть в квадратних дужках рівняння (10)

$$\frac{du}{dx} + P(x) \cdot u = 0; \quad (11)$$

$$\frac{du}{dx} = -P(x) \cdot u;$$

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx; \quad \int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx;$$

$$\ln|u| = -\int P(x)dx;$$

$$u = e^{-\int P(x)dx}. \quad (12)$$

Найдену функцію підставимо в співвідношення (10)

$$e^{-\int P(x)dx} \cdot \frac{dv}{dx} = Q(x).$$

Розділимо змінні

$$e^{-\int P(x)dx} dv = Q(x) dx, \quad dv = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx;$$

$$v = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C. \quad (13)$$

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C \right]. \quad (14)$$

При інтегруванні диференціальних рівнянь завжди отримується загальний розв'язок.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' - \frac{2}{x}y = x^3$.

Розв'язання. Нехай $y = u \cdot v$; $y' = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$;

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} - \frac{2}{x}u \cdot v = x^3; \quad u \frac{dv}{dx} + v \left[\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x} \right] = x^3;$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x} = 0; \quad \frac{du}{u} = \frac{2dx}{x}; \quad \ln|u| = \ln x^2; \quad u = x^2;$$

$$x^2 \frac{dv}{dx} = x^3; \quad \frac{dv}{dx} = x; \quad dv = x dx; \quad v = \int x dx + C; \quad v = \frac{x^2}{2} + C.$$

$y = u \cdot v = x^2 \cdot \left(\frac{x^2}{2} + C \right)$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

6. Диференціальне рівняння Якова Бернуллі і методи його розв'язання

Розглянемо рівняння виду

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n, \quad (19)$$

де $P(x)$, $Q(x)$ – неперервні функції від x і $n \neq 0$, $n \neq 1$ (в протилежному випадку мали б лінійне рівняння). Це рівняння називається рівнянням Бернуллі. Воно приводиться до лінійного наступним перебудуванням.

Розділивши всі члени рівняння на y^n , отримаємо

$$y^{-n} \cdot y' + P(x) \cdot y^{1-n} = Q(x).$$

Зробимо заміну змінної $z = y^{1-n}$, тоді

$$\frac{dz}{dx} = (1-n) \cdot y^{-n} \frac{dy}{dx}. \quad (20)$$

Підставляючи це значення в рівняння (19) отримаємо лінійне диференціальне рівняння

$$y^{-n} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{dz}{dx};$$

$$\frac{1}{1-n} \cdot \frac{dz}{dx} + P(x) \cdot z = Q(x) \quad (21)$$

– лінійне рівняння.

Розв'язати лінійне рівняння (21) можна за допомогою підстановки $z = u \cdot v$.

Знайшовши загальний інтеграл і підставивши замість z вираз y^{-n+1} , отримаємо загальний інтеграл рівняння Бернуллі.

Зауваження. Рівняння Якова Бернуллі можна інтегрувати безпосередньо методом Іоанна Бернуллі.

Лекція №11

Тема: Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку.

Питання лекції:

1. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку.
Теорема про структуру загального розв'язку диференціальні рівняння другого порядку.
2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (І випадок).
3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ІІ випадок і зауваження).

1. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку. Теорема про структуру загального розв'язку диференціальні рівняння другого порядку.

Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку .

Розглянемо неоднорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = f(x), \quad (1)$$

де $P_1(x), P_2(x), f(x)$ - неперервні функції.

Разом з цим рівнянням розглянемо рівняння

$$y'' + P_1(x)y' + P_i(x)y = 0, \quad (2)$$

яке є однорідним рівнянням неоднорідного рівняння (1).

Теорема Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1) складається із суми двох розв'язків

$$y = y_0 + \bar{y}, \quad (3)$$

де y_0 - загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння(2):

$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2, \bar{y}$ - який-небудь частковий розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (1). (Без доведення)

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами :

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \quad (4)$$

де $a_1, a_2 \in \mathbb{R}, f(x)$ - неперервна функція. Рівняння (4) являє собою математичну модель вимушених коливань .

Загальний розв'язок (4) складається із суми двох розв'язків:
 $y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2$, отриманий із диференціального рівняння
 $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ і $\bar{y}$ - частковий розв'язок диференціального рівняння (4).

Займаемая методами знаходження $\bar{y}$.

Виявляється, що якщо права частина рівняння (4) має спеціальний вигляд, то початковий розв'язок $\bar{y}$ можна також знайти алгебраїчним шляхом без інтеграла, методом невизначених коефіцієнтів.

І випадок . $f(x) = P_n(x) \cdot e^{mx}$ тобто

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = P_n(x) \cdot e^{mx}, \quad (4')$$

де $P_n(x)$ -многочлен n -ої степені. $P_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n$,

m - дійсне або комплексне число .

Диференціальне рівняння (4') описує вимушені коливання, а число m характеризує частоту вимушених коливань.

2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (І випадок).

При знаходженні часткового розв'язку $\bar{y}$ диференціальне рівняння (4') можуть представитися такі три випадки :

а) нехай число m не є коренем характеристичного рівняння, тобто
 $m^2 + a_1 m + a_2 \neq 0$.

Частота власних коливань не співпадає з частотою вимушених коливань .

$$m \neq \kappa_1, m \neq \kappa_2.$$

Тоді частковий розв'язок (4') шукають в такому ж вигляді як права частина

$$\bar{y} = Q_n(x) \cdot e^{mx} \quad (5),$$

$$\text{де } Q_n = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_{n-1} x + B_n$$

$Q_n(x)$ - -многочлен з невизначеними коефіцієнтами. Підставимо розв'язок (5) в диференціальне рівняння (4').

$$(Q_n e^{mx})'' + a_1 \cdot (Q_n e^{mx})' + a_2 Q_n e^{mx} = P_n e^{mx},$$

$$Q_n'' e^{mx} + 2m Q_n' \cdot e^{mx} + m^2 Q_n \cdot e^{mx} + a_1 (Q_n' e^{mx} + m Q_n \cdot e^{mx}) + a_2 \cdot Q_n \cdot e^{mx} = P_n \cdot e^{mx}.$$

Використавши $(u \cdot v)'' = u'' v + 2u' v' + u v''$ і скоротив на e^{mx} , отримаємо

$Q_n''(x) + (2m + a_1) \cdot Q_n'(x) + (m^2 + a_1m + a_2) \cdot Q_n(x) = P_n(x)$. Оскільки m - не є коренем характеристичного рівняння, то в (6) зліва стоїть многочлен n -ої степені з невідомими коефіцієнтами, а справа з відомими коефіцієнтами.

Якщо (5) є розв'язком диференціального рівняння (4'), то (6) – тотожність.

Порівнюючи коефіцієнти зліва і справа при однакових степенях x отримаємо систему $(n+1)$ рівняння з $(n+1)$ невідомим $B_0, B_1, \dots, B_n$. Знайдені коефіцієнти підставляємо в (5) і отримуємо шуканий розв'язок.

б) нехай число m - корінь характеристичного рівняння (співпадає з одним із коренів)

$$m^2 + a_1m + a_2 = 0$$

$$m = k_1, m \neq k_2$$

Отже частота власних коливань співпадає з частотою вимушених коливань, маємо резонанс.

Якщо шукати розв'язок у вигляді (5), то в (6) зліва буде стояти многочлен $Q_{n-1}(n-1)$ степені. Щоб зліва в (6) стояв многочлен n -ої степені, треба збільшити степінь многочлена на одиницю, тобто помножити на

$$\bar{y} = x \cdot Q_n(x) \cdot e^{mx} \quad (7)$$

в) Нехай число m - є двохкратним коренем характеристичного рівняння

$$m^2 + a_1m + a_2 = 0, \quad 2m + a_1 = 0 \quad (m + n = -a_1)$$

$$m = k_1, m = k_2$$

подвійний резонанс.

Якщо шукати розв'язок у вигляді (5), то в (6) зліва буде стояти многочлен $n-2$ -степені, тому розв'язок буде мати вигляд

$$\bar{y} = x^2 \cdot Q_n(x) \cdot e^{mx} \quad (8)$$

Приклад 1.

$$y'' - y = 4xe^x, \quad y(0)_z = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (m = 1)$$

Розв'язання.

Загальний розв'язок $y = y_0 + \bar{y}$ (за теоремою 5), $y'' - y = 0$.

Складаємо характеристичне рівняння

$$k^2 - 1 = 0; \quad k_1 = -1; \quad k_2 = 1$$

$$y_1 = e^x; \quad y_2 = e^{-x}; \quad y_0 = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

$\bar{y} = (B_0 x + B_1) \cdot e^x \cdot x$, оскільки $(m = k = 1)$ -резонанс.

$$\begin{array}{l|l} -1 & \bar{y} = (B_0 x^2 + B_1 x) e^x \\ 0 & \bar{y}' = (2B_0 x + B_1) e^x + (B_0 x^2 + B_1 x) e^x \\ 1 & \bar{y}'' = 2B_0 e^x + 2(2B_0 x + B_1) e^x + (B_0 x^2 + B_1 x) e^x \end{array}$$

$$-B_0 x^2 + B_1 x + 2B_0 + 4B_0 x + 2B_1 + B_0 x^2 + B_1 x = 4x$$

$$2B_0 + 2B_1 + 4B_0 x = 4x$$

$$\begin{array}{l|l} x^0 & 2B_0 + 2B_1 = 0 \\ x & 4B_0 = 4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2 \cdot 1 + 2B_1 = 0, \Rightarrow B_1 = -1 \\ B_0 = 1 \end{array}$$

Тоді $\bar{y} = (x-1)x \cdot e^x$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + (x-1) \cdot x \cdot e^x$$

Знайдемо тепер c_1 і c_2 із заданих початкових умов

$$y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + x \cdot e^x + (x-1) \cdot e^x + (x-1) \cdot x \cdot e^x$$

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 + 0 \\ 1 = c_1 - c_2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 & 2c_1 = 2, & c_1 = 1 \\ c_1 - c_2 = 2 & c_2 = -1 \end{cases}$$

$$y = e^x - e^{-x} + (x-1) \cdot x \cdot e^x$$

3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (II Івипадок).

Нехай маємо рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = P_n(x) \cdot e^{ax} \cdot \cos bx + Q_m(x) \cdot e^{ax} \cdot \sin bx, \quad (n \geq m) \quad (9)$$

Теорема. (про суперпозиції розв'язків)

Якщо права частина лінійного неоднорідного диференціального рівняння уявляє собою суму двох функцій, тобто

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 \quad y'' + a_1 y' + a_2 y &= f_1(x) & (11), a \\ \bar{y}_2 \quad y'' + a_1 y' + a_2 y &= f_2(x) & (12), mo \end{aligned}$$

частковий розв'язок диференціального рівняння (10) дорівнює $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$

Другий випадок взагалі нічим не відрізняється від першого, якщо праву частину диференціального рівняння (9) перетворити за формулами Ейлера і скористатись теоремою .

$$\text{Дійсно, } \begin{aligned} e^{bix} &= \cos bx + i \sin bx \\ e^{-bix} &= \cos bx - i \sin bx \end{aligned} \quad \cos bx = \frac{e^{bix} + e^{-bix}}{2}; \quad \sin bx = \frac{e^{bix} - e^{-bix}}{2i};$$

$$\text{Тоді } y'' + a_1 y' + a_2 y = M_n(x) \cdot e^{(a+bi)x} + N_n(x) \cdot e^{(a-bi)x} \quad (13)$$

Зробимо аналіз (13)

а) якщо число $a + bi \neq k$, то частковий розв'язок

$$\bar{y} = U_n(x) \cdot e^{ax} \cdot \cos bx + v_n(x) \cdot e^{ax} \cdot \sin bx \quad (14)$$

(не має резонансу)

б) $a + bi = k$, тобто є резонанс, тоді

$$\bar{y} = x \cdot [U_n(x) \cdot e^{ax} \cdot \cos bx + v_n(x) \cdot e^{ax} \cdot \sin bx] \quad (15)$$

де $U_n(x)$, $v_n(x)$ - многочлени n -ої степені з невизначеними коефіцієнтами, котрі знаходяться методом невизначених коефіцієнтів.

Зауваження 1 .Якщо права частина диференціального рівняння (9) є тільки єдиним доданком $f(x) = Q_n(x) \cdot e^{ax} \cdot \sin bx$, то частковий розв'язок теж відшукується в вигляді (14) і ().

Зауваження 2.Якщо $f(x) = A_0 \cos bx + B_0 \sin bx$, а саме

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = A_0 \cos bx + B_0 \sin bx,$$

де A_0, B_0 - визначені числа ,то

$$1) \quad bi \neq k, \quad \bar{y} = A \cos bx + B \sin bx \quad (14')$$

$$2) \quad bi = k, \quad \bar{y} = x \cdot (A \cos bx + B \sin bx) \quad (15')$$

Зауваження 3. Розгляне на теорія розповсюджується і на лінійні неоднорідні диференціальні рівняння з сталими коефіцієнтами n -го порядку.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок

$$y'' + 2y' + 5y = 2 \cos x + 4 \sin x$$

Розв'язання

$$a = 0, \quad b = 1.$$

$$y = y_0 + \bar{y}$$

$$1) \quad y'' + 2y' + 5y = 0$$

$$y_1 = e^{-x} \cdot \cos 2x, \quad y_2 = e^{-x} \cdot \sin 2x,$$

$$k^2 + 2k + 5 = 0$$

$$k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

$$y_0 = c_1 \cdot e^{-x} \cos 2x + c_2 \cdot e^{-x} \sin 2x$$

$$5 \left| \begin{array}{l} \bar{y} = A \cos x + B \sin x \end{array} \right.$$

$$2 \left| \begin{array}{l} \bar{y}' = -A \sin x + B \cos x \end{array} \right.$$

$$1 \left| \begin{array}{l} \bar{y}'' = -A \cos x - B \sin x \end{array} \right.$$

$bi = i \neq k$ - резонансу немає

$$5A \cos x + 5B \sin x - 2A \sin x + 2B \cos x - A \cos x - B \sin x = 2 \cos x + 4 \sin x$$

$$\begin{cases} 5A + 2B - A = 2 \\ 5B - 2A - B = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 4A + 2B = 2 \\ 4B - 2A = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2A + B = 1 \\ -A + 2B = 2 \end{cases}$$

$$B = 1 - 2A; \quad -a + 2(1 - 2A) = 2; \quad -A + 2 - 4A = 2 \Rightarrow A = 0 \quad B = 1$$

$$\text{Тоді } \bar{y} = \sin x$$

$$y = c_1 e^{-x} \cos 2x + c_2 e^{-x} \sin 2x + \sin x$$

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ З МОДУЛЯ №2

«Інтегральне числення. Диференціальні рівняння першого та другого порядку»

Практичне заняття №3.

Тема: *Застосування визначеного інтеграла.*

1. Обчислення площі плоскої фігури.
2. Обчислення об'єму тіла, отриманого при обертанні криволінійної трапеції навколо осі абсцис та ординат.

Ціль:

1. Вивчити основні формули.
2. Знати застосування визначного інтеграла.
3. Вміти знаходити площу, об'єм .

Час. 2 год.

Література: [1], гл. 12, §§1 – 9; [2], гл. 7, §3, 3.1 – 3.6; [4], гл. XV, §§1 – 8

3.1. Теоретична частина.

Площа в декартових координатах

Якщо на відрізку $[a;b]$ функція $y = f(x)$ неперервна і $f(x) \geq 0$, то площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$ та прямими $x = a, x = b, y = 0$ (рис.3), знаходять за формулою

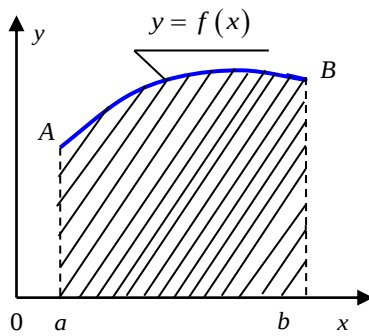


Рис.1

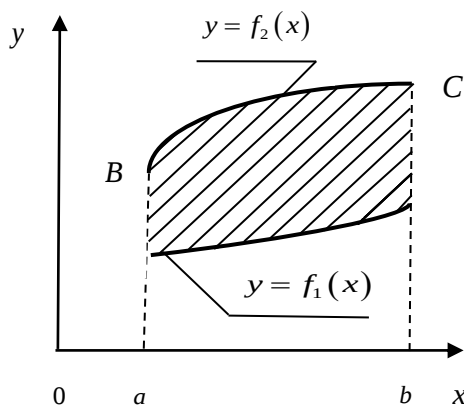
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Якщо $f(x) \leq 0$ на $[a,b]$, то фігура лежить під віссю Ox і тоді її площа обчислюється за формулою

$$S = -\int_a^b f(x) dx.$$

Формули (10.1) і (10.2) можна об'єднати в одну

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$



Якщо треба обчислити площу фігури $ABCD$ (рис.4), то цю площу можна представити як різницю площ, тобто за формулою

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

Обчислення об'ємів тіл

Нехай треба знайти об'єм тіла, якщо відомі площі S перерізів цього тіла площинами, перпендикулярними до деякої осі, наприклад Ox : $S = S(x)$, $a \leq x \leq b$ (рис.8). Тоді утворену між перерізами фігуру можна вважати за циліндр з основою $S(x)$ і висотою dx . Тому диференціал об'єму $dV = S(x) \cdot dx$, і якщо x змінюється від a до b , то об'єм тіла дорівнює

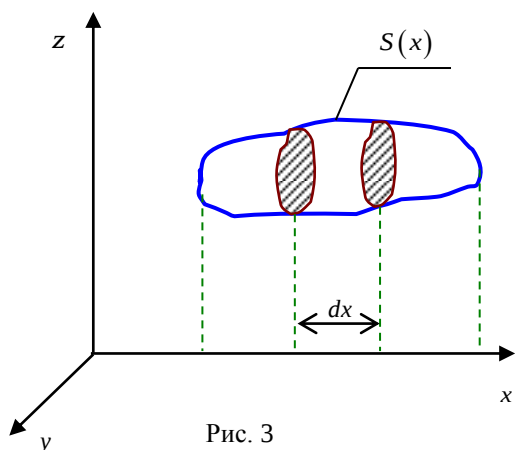


Рис. 3

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Формула (4.5) називається формулою об'єму тіла за площинами паралельних перерізів.

Якщо трапецію обертати навколо осі Ox , то утвориться просторова фігура, яка називається тілом обертання. Оскільки площа паралельного перерізу $S = \pi \cdot y^2 = \pi \cdot f^2(x)$, то згідно з формулою

(4.5) об'єм тіла, утвореного обертанням даної трапеції навколо осі Ox ,

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx$$

3.2. Практична частина.

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 3x$ і прямою $y = 4 - x$ (рис.5).

Розв'язання. Знаходимо точки перетину параболі і прямої.

Розв'язавши систему $\begin{cases} y = x^2 - 3x \\ y = 4 - x \end{cases}$, отримаємо $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

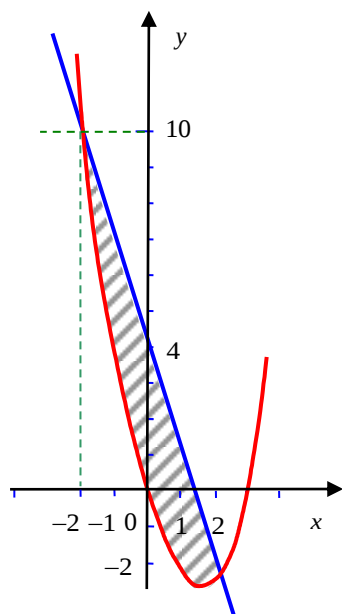


Рис. 4

Прийнявши за $f_2(x) = 4 - x$, а за $f_1(x) = x^2 - 3x$ і використавши формулу (10.4), матимемо:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 (4 - 3x - x^2 + 3x) dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \\ &= 2 \cdot \int_0^2 (4 - x^2) dx = 2 \cdot \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \\ &= 2 \cdot \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{32}{3} \text{ (од.}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Приклад 2. Осі двох однакових циліндрів з радіусом основи, рівним a , перетинаються під прямим кутом. Знайти об'єм тіла, що складає загальну частину цих циліндрів (рис. 9).

Розв'язання. Прийнемо осі циліндрів за осі Oy і Oz . Тіло $OABCD$ складає восьму частину шуканого нами об'єму. Перетинаємо це тіло площиною, перпендикулярною до осі Ox , на відстані x від O . У перерізі одержимо квадрат $EFLK$ із стороною $EF = \sqrt{a^2 - x^2}$, тому

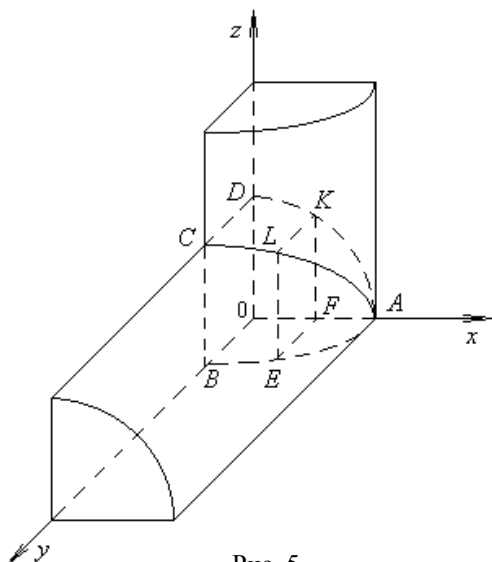


Рис. 5

$$S(x) = a^2 - x^2$$

$$V = 8 \cdot \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{16}{3} a^3 \text{ (од.}^3\text{)}.$$

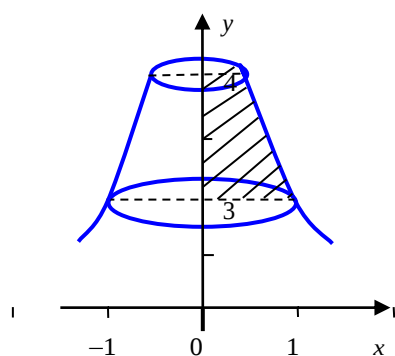


Рис. 6

Приклад 3. Обчислити об'єм тіла, отриманого обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої гіперболою $xy = 2$, прямими $y = 2$, $y = 4$ і віссю Oy (рис. 10).

Розв'язання. Підставивши в формулу (4.7)

$$c = 2, \quad d = 4 \quad x = \frac{2}{y},$$

отримаємо:

$$V_y = \pi \cdot \int_2^4 \left(\frac{2}{y} \right)^2 dy = 4\pi \cdot \left(-\frac{1}{y} \right) \Big|_2^4 = \pi \text{ (од.}^3\text{)}$$

Самостійна робота.

1. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій

$$y = \sqrt{x}, \quad y = 2 - x, \quad y = 0$$

$$y = (x - 2)^3, \quad y = 4x - 8$$

2. Обчислити об'єм тіла утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями, навколо відповідної осі

$$y = -x^2 + 5x - 6, \quad y = 0 \text{ осі } Ox$$

$$y = \sin^2 x, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad y = 0 \text{ осі } Ox$$

Домашня робота.

1. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = x, \quad x = 2$$

$$y = x^2 - 2x + 3, \quad y = 3x - 1$$

2. Обчислити об'єм тіла утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями, навколо відповідної осі

$$y = 2x - x^2, \quad y = 0 \text{ осі } Ox$$

$$y = \sin x, \quad , \quad y = 0 \text{ осі } Ox$$

Питання для самоперевірки:

1. Загальна схема застосування визначених інтегралів. Метод інтегральних сум і метод диференціалу.
2. Обчислення площ плоских фігур за допомогою визначеного інтегралу в прямокутній системі координат.
3. Обчислення об'ємів тіл по площам паралельних перерізів.
4. Обчислення об'ємів тіл обертання відносно осей Ox і Oy

Практичне заняття №4

Тема: *Однорідні функції. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку та метод їх розв'язання.*

1. Означення однорідного диференціального рівняння.
2. Перевірка функції на однорідність.
3. Розв'язування однорідних диференціальних рівнянь першого порядку методом підстановки.

МЕТА: 1. Знати основні визначення.

2. Вміти розв'язувати однорідні диференціальні рівняння за допомогою заміни змінної.

ЧАС: 2 години.

ЛІТЕРАТУРА: [1] т. 2 гл. XIII § 5.

4.1. Теоретична частина

Функція $f(x, y)$ називається однорідною n -го виміру відносно змінних x та y , якщо для $\forall \lambda \neq 0$ справедлива тотожність $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$.

Приклади:

$$\text{а) } f(x, y) = 3x^2 + 2xy - y^2 ; \quad \text{в) } f(x, y) = \frac{y}{x} \operatorname{tg} \frac{y}{x} + 2 ;$$

$$\text{б) } f(x, y) = \sqrt[3]{2x^2y + y^3} ; \quad \text{г) } f(x, y) = \frac{3x - y}{x - 2y}.$$

Диференціальне рівняння $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ називається однорідним, якщо функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ є однорідними одного й того ж виміру.

Якщо диференціальне рівняння подано у вигляді $y' = f(x, y)$ то воно називається однорідним, при цьому $f(x, y)$ - однорідна функція нульового виміру. За допомогою заміни змінної $y = u \cdot x$ (або $x = u \cdot y$) однорідні диференціальні рівняння зводяться до диференціальних рівнянь з відокремлюючими змінними.

4.2. Практична частина

1. Знайти загальний інтеграл або загальне рішення:

$$\text{а) } xdy = (2x - y)dx.$$

Розділимо рівняння на dx :

$$x \frac{dy}{dx} = 2x - y ; \quad xy' = 2x - y ; \quad y' = \frac{2x - y}{x}$$

Застосуємо заміну $y = u \cdot x, \quad y' = u'x + u,$

$$u'x + u = \frac{2x - ux}{x} ; \quad x \frac{du}{dx} = 2 - u + u ; \quad xdu = 2dx.$$

відокремимо змінні: $du = \frac{2}{x} dx$.

Інтегруючи, одержимо:

$$\int du = \int \frac{2}{x} dx; \quad u = 2 \ln x + C$$

Застосуємо зворотну зміну $u = \frac{y}{x}$, $\frac{y}{x} = 2 \ln x + C$,

$y = 2x \ln x + Cx$ - загальний інтеграл.

Відповідь: $y = x \ln \ln Cx$

б) $y' = e^{-\frac{y}{x}}$.

в) $xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} + x$. Відповідь: $\sin \frac{y}{x} = \ln Cx$.

2. $y' = \frac{x^2}{y^2} + 4 \frac{y}{x} + 2$;

Маємо однорідне рівняння.

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y^2} + 4 \frac{y}{x} + 2;$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2}{\lambda^2 y^2} + 4 \frac{\lambda y}{\lambda x} + 2 = \frac{x^2}{y^2} + 4 \frac{y}{x} + 2 = f(x, y);$$

Зробимо зміну $t = \frac{y}{x}$, тоді:

$$y = tx, y' = t + xt';$$

$$t + xt' = t^2 + 4t + 2;$$

$$xt' = t^2 + 3t + 2;$$

$$\frac{dt}{dx} x = t^2 + 3t + 2;$$

$$\int \frac{dt}{t^2 + 3t + 2} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{dt}{t^2 + 3t + 2} = \frac{dt}{(t + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + 2} = \frac{dt}{(t + \frac{3}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2\frac{1}{2}} \ln \left| \frac{t + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{t + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}} \right| + \ln c =$$

$$= \ln \left| \frac{t+1}{t+2} \right| + \ln c = \ln \left| \frac{\frac{y}{x} + 1}{\frac{y}{x} + 2} \right| + \ln c;$$

$$\ln |x| + \ln c = \ln \left| \frac{\frac{y}{x} + 1}{\frac{y}{x} + 2} \right|;$$

$$xc = \frac{\frac{y}{x} + 1}{\frac{y}{x} + 2}$$

$$y = \frac{(2cx - 1)x}{1 - cx} \quad \text{загальний розв'язок}$$

$$3. y' = \frac{x+y}{x-y} \quad \text{-однорідне рівняння, так як}$$

$$f(x, y) = \frac{x+y}{x-y};$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x + \lambda y}{\lambda x - \lambda y} = \frac{\lambda(x+y)}{\lambda(x-y)} = \frac{x+y}{x-y};$$

Зробимо зміну: $y = tx$;

$$y' = t + t'x; t = \frac{y}{x};$$

$$t + t'x = \frac{x + tx}{x - tx};$$

$$t + t'x = \frac{x(1+t)}{x(1-t)};$$

$$t'x = \frac{1+t}{1-t} - t;$$

$$\frac{dt}{dx} x = \frac{1+t-t+t^2}{1-t};$$

$$\frac{dt}{dx} x = \frac{1+t^2}{1-t};$$

$$\int \frac{(1-t)dt}{1+t^2} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(1-t)dt}{1+t^2} &= \int \frac{(-\frac{1}{2}2t+1)dt}{1+t^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{2tdt}{1+t^2} + \int \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{1}{2} \ln|1+t^2| + \arctg t + c = \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{y^2}{x^2} \right| + \arctg \frac{y}{x} + \ln c; \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln c;$$

$$\ln|x| = -\frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{y^2}{x^2} \right| + \arctg \frac{y}{x} + \ln c;$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}} e^{\arctg \frac{y}{x}} c \quad \text{або} \quad c \sqrt{x^2 + y^2} = e^{\arctg \frac{y}{x}} - \text{загальний інтеграл}$$

Завдання для самосійної аудиторної роботи

Розв'язати рівняння:

I варіант.

$$1. \quad xy' = y \ln \frac{y}{x}$$

$$2. \quad y' \sin^2 x = y \ln y$$

II варіант

$$1. \quad xdy = ydx + x \sin \frac{y}{x} dx$$

$$2. \quad x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1-x^2}y' = 0$$

III варіант

$$1. \quad y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2x} + \frac{y}{x}$$

$$2. \quad (e^x + 4)dy - ye^x dx = 0$$

Домашнє завдання

Розв'язати рівняння:

$$1. \quad xdy = (y + x \cos^2 \frac{y}{x})dx$$

$$2. \quad \sqrt{3-y^2} dx - ydy = x^2 ydy$$

